DS n°1 de Mathématiques
Lundi 9 Septembre 2024, de 10h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.
- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on barre le contenu proprement. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Calculs algébriques

Exercice n°1 :

Les 3 questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. Tous les calculs et justifications doivent apparaître sur votre copie.

1. Mettre les fractions suivantes sous la forme d'une seule fraction irréductible. Ici x est un réel qui n'annule pas les dénominateurs.

La moitié des points sera allouée au calcul et l'autre moitié à la simplification sous forme irréductible. Si le résultat est entier, on l'écrira comme tel.

a) $\dfrac{105}{70}$

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{13}{14}$

c) $-\dfrac{1-9/10}{1/5-1}$

d) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x-1}{x+1}$

e) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x}$

f) $\dfrac{1-1/(x+2)}{1/x+1}$

2. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier, b est l'entier positif le plus petit possible. Si le résultat est entier, on l'écrira comme tel.

Faire bien attention à proposer une réponse conforme à ce qui est demandé.

a) $\sqrt{72}$

b) $7\sqrt{12}+14\sqrt{48}$

c) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{9}{\sqrt{27}}$

3. Ecrire les nombres suivants sous la forme $\pm a^N$ où a est un entier **positif** le plus petit possible et N un entier relatif.

Faire bien attention à proposer une réponse conforme à ce qui est demandé.

a) $(-7)^{-4}\times 7^3$

b) $\left(\dfrac{(-15)^2\times(-15)^{11}}{(-15)^{10}\times(-15)^6}\right)^9$

c) $2\times 3^n+3^n$

d) $2\times 4^{n+1}+2^{2n+3}$

Exercice n°2 :

Les questions 2. et 3. sont indépendantes.

1. Rappeler les identités remarquables du second degré.

2. Factoriser les expressions suivantes en repérant un facteur commun ou en utilisant les identités remarquables de la question **1.** :

a) $A(x) = 3x - 12x^2$

b) $B(x) = x^2 - 2x + 1 - (x-1)(2x+3)$

c) $C(x) = (3x+3)^2 - 9x^2$

d) $D(x) = (2-x)(x+1) - (2x-4)(x+3) + (2x+1)(x-2)$

3. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + \sqrt{b}$ où a, b sont des nombres entiers positifs. On utilisera les identités rappelés à la question **1.**

Faire bien attention à proposer une réponse <u>conforme</u> à ce qui est demandé.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \qquad B = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

Fonctions polynômes et rationnelles

Exercice n°3 :

Déterminer les éventuelles racines (simplifier les expressions obtenues) puis donner le signe de chacun des polynômes définis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P_1(x) = 3 - 6x \qquad P_2(x) = 1 + 9x^2 - 6x \qquad P_3(x) = 5x^2 + 11x + 2.$$

Exercice n°4 :

On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Déterminer une racine évidente de P, puis proposer une factorisation de P comme produit d'un polynôme de degré un et d'un polynôme de degré deux.

2. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice n°5 :

On considère la fonction rationnelle f définie, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, par

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} - x$$

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} \leq x$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$