

Exercice n°1

$$1) a) \frac{105}{70} = \frac{3 \times 35}{2 \times 35} = \frac{3}{2} \quad b) \frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{13}{14} = \frac{1 \times 7}{2 \times 2 \times 7} + \frac{4 \times 2 \times 2}{7 \times 2 \times 2} + \frac{13 \times 2}{2 \times 7 \times 2}$$

$$c) \frac{1 - 9/10}{1/5 - 1} = \frac{\frac{1}{10} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1 - 10}{10}}{\frac{1 - 5}{5}} = \frac{\frac{-9}{10}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-9 \times 5}{10 \times (-4)} = \frac{9}{8}$$

$$= \frac{7 + 16 + 26}{28} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$$

$$d) \frac{1}{1-x} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1) - (2x-1)(1-x)}{(1-x)(x+1)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(1-x)(x+1)} = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)(x+1)}$$

$$e) \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} = \frac{x \times 1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{(x+2) \times 1}{(x+2)x(x+1)} + \frac{(x+1)(x+2) \times 1}{(x+1)(x+2)x}$$

$$= \frac{x - (x+2) + (x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 + 3x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x(x+3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}$$

$$f) \frac{1 - 1/(x+2)}{1/x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x}{x+2}$$

$$2) a) \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \quad b) 7\sqrt{12} + 14\sqrt{48} = 7\sqrt{4 \times 3} + 14\sqrt{16 \times 3} = 7 \times 2\sqrt{3} + 14 \times 4\sqrt{3} = 70\sqrt{3}$$

$$c) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5 \quad d) \frac{9}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{81}{27}} = \sqrt{3}$$

$$3) a) (-7)^{-4} \times 7^3 = \frac{7^3}{(-7)^4} = \frac{7^3}{7^4} = \underline{7^{-1}}$$

$$b) \left(\frac{(-15)^4 \times (-15)^{11}}{(-15)^{10} \times (-15)^6} \right)^9 = - \left(\frac{15^4 \times 15^{11}}{15^{10} \times 15^6} \right)^9 = - \left(\frac{15^{15}}{15^{16}} \right)^9 = - (15^{-1})^9 = \underline{-15^{-9}}$$

$$c) 2 \times 3^n + 3^n = 3^n (2 + 1) = 3^n \times 3 = \underline{3^{n+1}}$$

$$d) 2 \times 4^{n+1} + 2^{2n+3} = 2 \times 2^{2n+2} + 2 \times 2^{2n+2} \\ = 4 \times 2^{2n+2} \\ = 2^2 \times 2^{2n+2} \\ = \underline{2^{2n+4}}$$

Exercice n°2

$$1) \text{ Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad ; \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$2) a) A(x) = 3x(1 - 4x)$$

$$b) B(x) = (x-1)^2 - (x-1)(2x+3) = (x-1)[(x-1) - (2x+3)] = (x-1)(-x-4)$$

$$c) C(x) = 9((x+1)^2 - x^2) = 9((x+1) - x)((x+1) + x) \\ = 9(2x+1)$$

$$d) D(x) = -(x-2)(x+1) - 2(x-2)(x+3) + (x-2)(2x+1) \\ = (x-2)[- (x+1) - 2(x+3) + (2x+1)] \\ = (x-2)(-x-6) = \underline{-(x-2)(x+6)}$$

$$3) A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1} = \underline{\sqrt{2}+1}$$

$$B = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = \underline{2+\sqrt{3}}$$

Exercice n°3

3

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$P_1(x)$	+	0	-

L'unique racine de P_1 est $\frac{1}{2}$.

coeff. dominant de P_2 : $9 > 0$

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$P_2(x)$	+	0	+

Le discriminant de P_2 est :
 $(-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

L'unique racine de P_2
 est $\frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$

coeff. dominant de P_3 : $5 > 0$

x	$-\infty$	-2	$-1/5$	$+\infty$
$P_3(x)$	+	0	-	+

Le discriminant de P_3 est
 $11^2 - 4 \times 5 \times 2 = 121 - 40 = 81 > 0$.

Les deux racines de P_3 sont :

$$\frac{-11 - \sqrt{81}}{2 \times 5} = -2$$

$$\text{et } \frac{-11 + \sqrt{81}}{2 \times 5} = -\frac{1}{5}$$

Exercice n°4

1) -1 est racine évidente de P, on réalise la division euclidienne de P par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x+1 \\ -[x^3 + x^2] & x^2 + x - 6 \\ \hline x^2 - 5x - 6 & \\ -[x^2 + x] & \\ \hline -6x - 6 & \\ -[-6x - 6] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)(x^2 + x - 6)$

2) Le polynôme $x^2 + x - 6$ possède 2 et -3 pour racines évidentes. Le coefficient dominant de ce polynôme étant $1 > 0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-		- 0 +		+
x^2+x-6	+	0	-	- 0 +	
$P(x)$	-	0	+	0	+

3) L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est :
 $\underline{]-\infty; -3[\cup]-1; 2[}$

Exercice n°5

4

1) Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. On a:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} - x = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} - x \\ &= \frac{(x+1) - 1 - x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x - x(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x(2-x^2)}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Ainsi: $f(x) = 0 \iff x(2-x^2) = 0 \iff x=0 \text{ ou } x^2=2$
 $\iff x=0 \text{ ou } x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2) L'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente donne:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$2-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$x-1$	-	-	-	-	0	+	+
$x+1$	-	-	0	+	+	+	+
f(x)	+	0	-	+	0	-	+

coeff. dominant $-1 < 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. On a:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \leq x \iff f(x) \leq 0.$$

Le tableau designe de la question précédente nous assure que l'ensemble des solutions recherchées est: $[-\sqrt{2}; -1[\cup [0; 1[\cup [\sqrt{2}; +\infty[$.