Correction DS n°1 de Mathématiques

Lundi 13 septembre 2021, de 8h à 12h

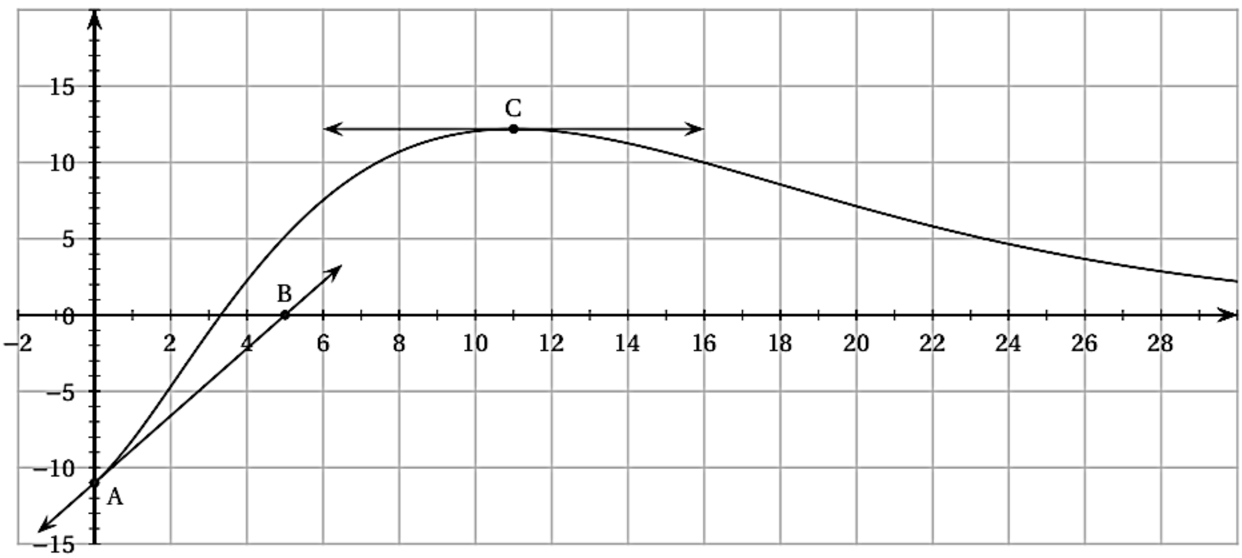
Les fonctions

Exercice n°1 : Lectures graphiques (inspiré Bac 2019 Amérique du Nord)

Dans le repère orthogonal ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est le graphe de la fonction f définie et dérivable sur $[0;30]$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point $B\,(5;0)$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.

L'équation $f(x)=0$, d'inconnue $x\in[0;30]$, possède pour unique solution $\sqrt{11}$.



Dans toute la suite, on note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;30]$ et F une primitive de f sur $[0;30]$.

1. Lire graphiquement les valeurs de $f'(0)$ et $f'(11)$ (aucune justification n'est attendue).

$f'(0)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-(-11)}{5-0}=\dfrac{11}{5}$ *et* $f'(11)=0$ *(tangente horizontale).*

2. Par lecture graphique et sans justification, donner le signe de $f'(x)$ sur $[0;30]$.

Pour tout $x\in[0;11]$, $f'(x)\geq 0$ *(*f *croissante sur l'intervalle* $[0;11]$*) et pour tout* $x\in[11;30]$, $f'(x)\geq 0$ *(*f *décroissante sur l'intervalle* $[11;30]$*).*

3. Par lecture graphique et sans justification, donner les variations de F sur $[0;30]$.

Etant donné que F *est une primitive de* f *sur l'intervalle* $[0;30]$*, on a* $F'=f$ *et les variations de* F *seront déduites du signe de* f*. Ainsi* F *est décroissante sur l'intervalle* $[0;\sqrt{11}]$ *(*$f(x)$ *est négatif sur cet intervalle), et* F *est croissante sur l'intervalle* $[\sqrt{11};30]$ *(*$f(x)$ *est positif sur cet intervalle)*

4. On note $I=\displaystyle\int_8^{14} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Donner l'interprétation géométrique de I.

La fonction f *étant positive sur l'intervalle* $[8;14]$*, le nombre* I *représente l'aire, en unités d'aires, comprise entre les droites d'équations* $y=0$*,* $x=8$*,* $x=14$ *et* $\mathscr{C}_f$*.*

b) Lire graphiquement un encadrement du nombre I entre deux entiers. Des explications sont attendues.

La fonction f *étant encadrée par les fonctions constantes de valeurs* 10 *et* 15 *sur l'intervalle* $[8;14]$*. Le nombre* I *sera encadré entre les entiers* $10\times(14-8)=60$ *et* $15\times(14-8)=90$*.*

Exercice n°2 : Utiliser les variations de la fonction dérivée (inspiré Bac 2019 Métropole)

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
f'	30	$\searrow$	-5	$\nearrow$	20

1. Combien de tangentes horizontales la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet-elle ? Une justification à l'aide d'un théorème vu en terminale est attendue.

La fonction f' est continue strictement décroissante sur l'intervalle $[0;5]$ à valeurs sur $[-5;30]$ (on a $0 \in [-5;30]$) et strictement croissante sur l'intervalle $[5;15]$ à valeurs sur $[-5;20]$ (on a $0 \in [-5;20]$). Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) nous assure que le nombre 0 possède un unique antécédent par la fonction f sur chacun des intervalles $[0;5]$ et $[5;15]$. Donc, la fonction f' s'annule en exactement deux points sur $[0;15]$. Autrement dit $\mathscr{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.

2. Donner un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Une justification est attendue.

La fonction dérivée f' étant croissante sur l'intervalle $[5;15]$, un théorème vu en terminale (? ? ? ?) nous assure que la fonction f est convexe sur $[5;15]$.

Exercice n°3 : Calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée sur l'ensemble donné :

1. $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$.

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2}$

2. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

$f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \dfrac{1-2x}{-3x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{(-3x+1)^2}$

4. $f(x) = \ln(1+2e^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{2e^x}{1+2e^x}$

5. $f(x) = e^{x^3-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = (3x^2-1)e^{x^3-x} = (\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)e^{x^3-x}$

Exercice n°4 : Une étude de fonction (inspiré Bac 2019 Métropole)

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0;30]$ par

$$f(x) = (5-2x)e^{-\frac{x}{5}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;30]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A : Variations et convexité

1. Calculer f'.

Pour tout $x \in [0;30]$, $f'(x) = \left(\dfrac{2}{5}x - 3\right)e^{-\frac{x}{5}}$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;60]$.

On sait que, pour tout $x \in [0;30]$, $e^{-\frac{x}{5}} > 0$. Ainsi le signe de $f'(x)$ sur $[0;30]$ est le signe de $\frac{2}{5}x - 3$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{15}{2}$		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	5	$\searrow$	$-10e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$-55e^{-6}$

3. Calculer f''.

Pour tout $x \in [0;30]$, $f''(x) = \left(1 - \frac{2}{25}x\right) e^{-\frac{x}{5}}$.

4. Etudier la convexité de f. Justifier que $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion.

Le signe de $f''(x)$ sur $[0;30]$ est le signe de $1 - \frac{2}{25}x$. On en déduit que $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[0;\frac{25}{2}\right[$, strictement négatif sur $\left]\frac{25}{2};30\right]$ et s'annule en $\frac{25}{2}$. On en déduit que f est convexe sur l'intervalle $\left[0;\frac{25}{2}\right]$, concave sur l'intervalle $\left[\frac{25}{2};30\right]$ et le point d'abscisse $\frac{25}{2}$ de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion.

Partie B : Tangentes et graphe

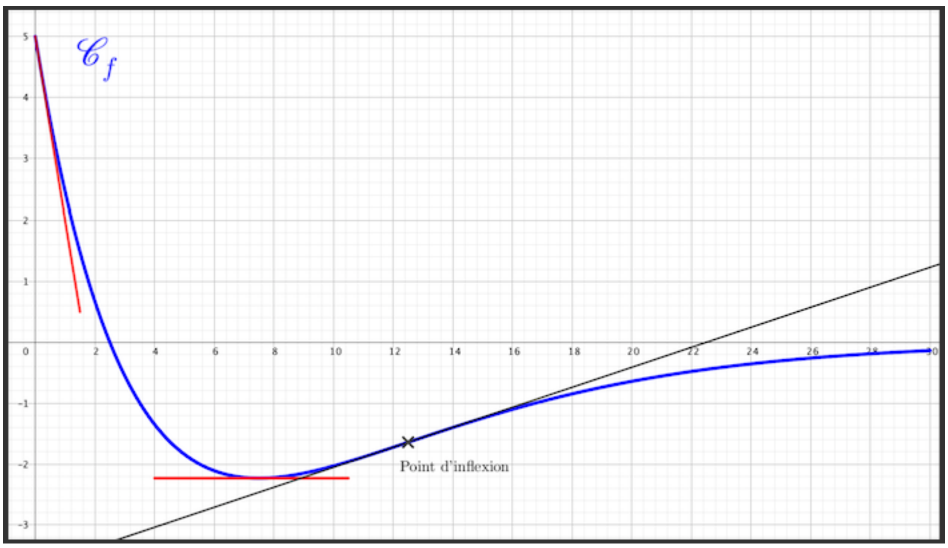
1. Justifier que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -3x + 5$.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, i.e. $y = -3x+5$.

2. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $0,5$ cm en abscisse et 2 cm en ordonnée : tracer T, tracer le(s) éventuelle(s) tangente(s) horizontale(s) et tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

Valeurs numériques : on pourra utiliser $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$ et $\frac{1}{e^6} \approx 0,002$.

3. Sans déterminer son équation, représenter la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'inflexion.



Partie C : Primitives et calcul d'une intégrale

On considère la fonction F définie pour tout $x \in [0;30]$ par $F(x) = (10x+25)e^{-\frac{x}{5}}$.

1. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;30]$.

On vérifie que $F' = f$.

2. La fonction f possède-t-elle d'autres primitives sur l'intervalle $[0;30]$? Si oui, les donner.

Sur l'intervalle $[0;30]$, *les primitives de* f *sont les fonctions* $x \mapsto F(x) + C$ *avec* C *décrivant* $\mathbb{R}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{30} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{30} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(10x+25)e^{-\frac{x}{5}}\right]_0^{30} = 325e^{-6} - 25.$$

Les suites

Exercice n°5 : Modélisation et étude d'une suite (inspiré Bac 2019 Centres étrangers)

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20% de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.
On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1$^{\text{er}}$ juillet de l'année $(2018 + n)$.
Au 1$^{\text{er}}$ juillet de l'année 2018, le loueur possède 150 vélos. Ainsi $u_0 = 150$.

1. **a)** Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1$^{\text{er}}$ juillet 2019.

On calcule $u_1 = u_0 - \dfrac{20}{100}u_0 + 35 = 0.8u_0 + 35 = 155.$

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$

De manière plus générale, le vendeur conserve d'une année sur l'autre 80% *de son stock et ajoute* 35 *vélos. D'où, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0.8u_n + 35$.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 175$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 175 \\ &= 0.8u_n + 35 - 175 \\ &= 0.8u_n - 140 \\ &= 0.8(u_n - 175) \\ &= 0.8v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) *est géométrique de raison* 0.8 *et de premier terme* $v_0 = u_0 - 175 = -25$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -25 \times 0.8^n$ *et donc* $u_n = v_n + 175 = 175 - 25 \times 0.8^n$.

c) Le loueur peut-il un jour espérer atteindre un parc de 200 vélos ? Si oui, au bout de combien d'années ?

D'après la question précédente, il est clair que non car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 175 < 200$.

3. On considère l'algorithme suivant :

$n \rightarrow 2018$

$u \rightarrow 150$

Tant que $u <= 160$:

  $n \rightarrow n + 1$

  $u \rightarrow u * 0.8 + 35$

Fin tant que

A la fin de l'algorithme, la variable n indique la valeur 2021.
Comment interpréter ce résultat ?

C'est la première année pendant laquelle le nombre de vélos du parc sera strictement supérieur à 160.

4. Déterminer à l'aide d'un calcul l'ensemble des entiers naturels n tels que : $u_n > 170$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Valeur numérique : on pourra utiliser $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,2.$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned} u_n > 170 &\iff 175 - 25 \times 0.8^n > 170 \\ &\iff -25 \times 0.8^n > -5 \\ &\iff 0.8^n < 0.2 \\ &\iff n\ln(0.8) < \ln(0.2) \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star] \\ &\iff n > \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.8)} \quad [\text{car } \ln(0.8) < 0] \\ &\iff n \geq 8 \end{aligned}$$

La première année pendant laquelle le nombre de vélos du parc sera supérieur ou égal à 170 *est* $2018 + 8 = 2026$.

Les probabilités

Exercice n°6 : Calculs de probabilités, variable aléatoire (inspiré Bac 2019 Antilles-Guyane)

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

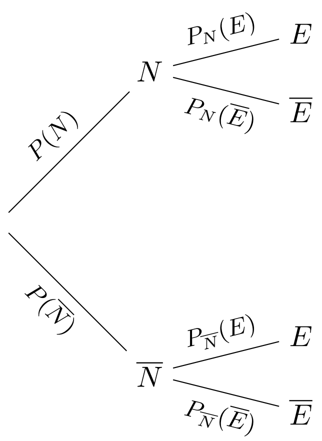
- **Etape 1 :** chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Etape 2 :**
  - **a)** s'il découvre un numéro de 1 à 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - **b)** sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont 2 secteurs contiennent une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note : N l'événement « le client découvre un numéro de 1 à 15 », et E l'événement « le client obtient une étoile ».

1. Représenter le jeu à l'aide d'un arbre de probabilité.



Les informations de l'énoncé nous assurent que :
$P(N) = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10}$, $P(\overline{N}) = \dfrac{35}{50} = \dfrac{7}{10}$, $P_N(E) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, $P_N(\overline{E}) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, $P_{\overline{N}}(E) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, $P_{\overline{N}}(\overline{E}) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.

$P(N \cap E) = P(N)P_N(E) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{25}$.

3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,38$.

Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(N \cap E) + P(\overline{N} \cap E) \\ &= P(N)P_N(E) + P(\overline{N})P_{\overline{N}}(E) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{12}{50} + \frac{7}{50} \\ &= \frac{19}{50} \\ &= 0,38 \end{aligned}$$

4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

On utilise la formule de Bayes :

$$P_E(N) = \frac{P(E \cap N)}{P(E)} = \frac{6}{25} \times \frac{50}{19} = \frac{12}{19}.$$

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros. Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 400 euros par tranches de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel. On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achats gagnés.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres. On précisera la loi de X.

Il y a $n = 100$ répétitions et la probabilités du « succès »est $p = P(E) = 0,38$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,38$. Ainsi, pour tout k entre 0 et 100, on a :

$$P(X = k) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}.$$

2. Expliciter la probabilité qu'il n'y ait aucun gagnant.

$P(X = 0) = \binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} = 0,62^{100}$

3. Expliciter la probabilité qu'il y ait au plus un gagnant.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} + \binom{100}{1} p^1 (1-p)^{100-1} \\ &= 0,62^{100} + 100p(1-p)^{99} \end{aligned}$$

4. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

L'espérance de X est $E(X) = n \times p = 38$. Le nombre moyen de gagnants pour 100 clients participants est donc de $100 \times 0,38 = 38$. Un bon d'achat est de 10 euros, le montant moyen de la somme totale offerte est de $38 \times 10 = 380$ euros, lebudget est donc suffisant.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆