Devoir surveillé n°2, lundi 12 octobre 2020

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Étude d'une fonction trigonométrique - Équations trigonométriques

On considère la fonction $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin(x)}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f. Réduire le domaine d'étude.
2. Dresser le tableau de variations sur <u>une période</u>.
3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$ (vous représenterez les (éventuelles) tangentes et asymptotes utiles à la réalisation de ce graphique).
4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\cos(2x) = \sin(x)$. Qu'obtient-on vis-à-vis de f ?

Exercice n°2 Étude d'une fonction - Résolution d'une équation

1. On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{x} \end{array}}$.
   (a) Faire l'étude complète de f (limite comprises mais sans le graphe).
   (b) Par lecture dans le tableau de variation, déterminer $f(\mathbb{R}_+^\star)$.
   (c) La fonction f est-elle bijective ? Justifier.
2. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $\quad 2^x = x^2$.
   (a) Montrer que (E) est équivalente à une équation faisant intervenir la fonction f.
   (b) Prouver l'existence d'une unique solution $a \in]1; e[$ et d'une unique solution $b \in]e; +\infty[$ à l'équation (E) (des justifications d'ordre théorique sont attendues).
   (c) Déterminer les solutions de (E).

Problème n°1 Sommes classiques - Manipulations de sommes - Sommes télescopiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

L'objectif de cet exercice est de proposer quatre méthodes permettant de justifier la relation $(\star)$ suivante

$$(\star) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

L'objectif étant de montrer la relation $(\star)$, on s'interdira de l'utiliser dans les calculs

1. **Méthode n°1 : (par récurrence)** Montrer $(\star)$ par récurrence.
2. **Méthode n°2 : (par somme télescopique)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right].$$

   (a) Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ (on utilisera ce résultat sans démonstration).

   (b) Calculer T_n en développant les termes dans la somme (faire apparaître S_n dans le résultat).

   (c) En utilisant un télescopage proposer une autre manière de calculer T_n.

   (d) En déduire la relation $(\star)$.

3. **Méthode n°3 : (par somme binomiale)**

   (a) Rappeler la formule de Pascal ainsi que la valeur du coefficient binomial $\binom{p}{2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, la valeur de $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)$ sous la forme d'une fraction ne faisant pas intervenir le symbole factoriel.

   (d) En déduire la relation $(\star)$.

4. **Méthode n°4 : (par somme double)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme double triangulaire

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j$$

   Calculer cette somme double de <u>deux manières différentes</u> et en déduire $(\star)$.

Problème n°2 Fonctions hyperboliques - Étude d'une fonction réciproque

1. **Partie n°1 : (Propriétés des fonctions ch et sh)**
   (a) Rappeler les définitions des fonctions ch, sh et étudier leur parité.
   (b) Etudier la dérivabilité de ch et sh, puis calculer leur dérivées respectives.
   (c) Dresser le tableau de variation de ch et sh sur leur ensemble de définition.
   (d) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
   (e) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
   $$\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) \qquad \text{et} \qquad \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y).$$

2. **Partie n°2 : (Calcul d'un produit télescopique)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
   $$P_n = \prod_{k=0}^{n} \text{ch}\left(2^k\right)$$
   (a) Démontrer que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\text{sh}\left(2^{k+1}\right) = 2\text{sh}\left(2^k\right)\text{ch}\left(2^k\right)$.
   (b) Réécrire le produit P_n comme un produit télescopique.
   (c) En déduire une expression de P_n en fonction de n sans le symbole $\prod$.

3. **Partie n°3 : (La fonction th)** On pose $\text{th} : x \mapsto \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D, puis les ensembles de continuité et de dérivabilité de th. Enfin, exprimer th' de deux manières différentes (une en fonction de ch, une autre en fonction de th).
   (b) Etudier la parité de th, puis dresser le tableau de variation de th sur D (ne pas calculer les limites aux bornes).
   (c) Montrer que pour tout $x \in D$,
   $$\text{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x)$.

4. **Partie n°4 : (La fonction argth)**
   (a) A l'aide de la partie n°3, démontrer que la fonction th réalise une bijection de D sur un intervalle J à déterminer.

   On note alors argth *la bijection réciproque de la fonction* $\text{th} : D \to J$.
   (b) Justifier la continuité et la monotonie de argth, puis dresser son tableau de variation sur J.
   (c) Etudier la dérivabilité de argth sur J et montrer que $\forall x \in J,\ \text{argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.
   (d) Dans un même repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer l'allure des courbes représentatives des fonction th et argth (vous ferez apparaitre les éventuelles asymptotes et les tangentes en 0).
   (e) Montrer que, pour tout $x \in J$, $\text{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   (f) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\text{argth}(x) + \text{argth}(2x) = \dfrac{1}{2}\ln(3)$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆