DS n°2 de Mathématiques
Lundi 7 Novembre 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les équations et inéquations

Exercice n°1 : (Résolutions d'(in)équations)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(I_1) : \quad \frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2}$$

2. Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_2) : \quad \ln(3x) + \ln(x-1) = \ln(2) + 2\ln(3)$$

3. On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

a) Factoriser le polynôme P comme un produit de polynôme de degré un.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(I_3) : \quad \frac{e^{2x} - 5}{2} \leq 3e^{-x} - e^{x}$$

4. Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_4) : \quad x^{x^2} = x^{2x^3}$$

Les suites

Exercice n°2 : (Variation d'une suite et calculs de sommes arithmétique et géométrique)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

2. On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 2 - 5n \quad \text{et} \quad w_n = 5^{n+1}\frac{2}{3^{2n}}.$$

a) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Vous préciserez pour chacune leur raison et leur premier terme.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n+5} v_k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Exercice n°3 : (Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -3u_{n+1} + 18u_n$$

avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°4 : (Etude de deux suites récurrentes)

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définies par les relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad a_{n+1} = 4a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = -3a_n$$

avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_n + b_n = 1$.

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ est arithmético-géométrique et déterminer une expression explicite de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

3. En déduire une expression explicite de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice n°5 : (Etude d'une suite homographique)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + 4u_n}{6 - u_n}$.

On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

Les questions **1.** à **4.** sont dépendantes. La question **5.** peut, éventuellement, être traitée indépendamment des autres.

1. Question préliminaire : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{6-x}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

2. On considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

- **a)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
  Vous préciserez sa raison et son premier terme.
- **b)** En déduire une expression explicite de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. Exprimer u_n en fonction de v_n.

4. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

5. Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les fonctions

Exercice n°6 : (Etude d'une fonction)

On considère la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = xe^{x^2-1}$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est également dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de f'. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{\ln(2)}$.

3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$. Factoriser l'expression obtenue et déterminer son signe en fonction de x.

4. On considère f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = x\left(1 - e^{x^2-1}\right)$.

  a) Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{x^2-1} \geq 0$.

  b) En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

5. On considère la fonction g définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = x$. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g.

Déduire de la question précédente la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice n°7 : (Etude de la relation $a^b = b^a$)

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation

$$(E): \quad a^b = b^a$$

où a et b sont des **entiers strictement positifs tels que** $a < b$.

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On pourra utiliser la relation $2 < e < 3$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $f(a) = f(b)$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f (on admettra que la limite de f en 0 est $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$ est 0). Remarquer que f admet un maximum global, vous préciserez sa valeur et le réel en lequel il est atteint.

3. En quel(s) point(s) $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ?

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer une représentation de $\mathscr{C}_f$ en faisant apparaître le(s) tangente(s) horizontale(s) et la tangente en 1.

6. Soit $k \in \mathbb{R}$. En utilisant les questions précédentes, donner sans justification, en fonction de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

7. **a)** Soient $a, b \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tels que $a < b$, et vérifiant la relation $f(a) = f(b)$.
Quelles sont les valeurs possibles pour a ? Justifier.

  b) Résoudre l'équation $1^b = b^1$ d'inconnue $b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

  c) Résoudre l'équation $2^b = b^2$ d'inconnue $b \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

8. Conclure en donnant l'ensemble des couples (a, b) où a et b sont des entiers strictement positifs, tels que $a < b$, vérifiant (E).

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$