DS n°2 de Mathématiques

Lundi 8 Novembre 2021, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les équations et inéquations

Exercice n°1 :

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{e^{3x-2}}{e^{x^2+1}} = e^{3x^2-4}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln\left(\dfrac{3x+1}{2x-4}\right) \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - x + 1}$.

Les suites

Exercice n°2 :

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 5$, $a_1 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$.
Déterminer l'expression explicite de a_n en fonction de n.

Exercice n°3 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n < 0$.
2. On introduit une suite auxiliaire $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n existe et $w_n < 0$.
   b) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$w_{n+1} = 3w_n - 2.$$
   c) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
3. Déterminer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **Python**

   Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel n non nul et qui affiche les valeurs u_k pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Les sommes

Exercice n°4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5 \times 7^k}{3^{2k}} \qquad\qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$$

Exercice n°5 :

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

On se propose d'exprimer v_n en fonction de n par deux méthodes différentes :

1. **Première méthode : conjecture et récurrence**
   - **a)** Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   - **b)** Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   - **c)** Démontrer ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
2. **Seconde méthode : par un calcul direct**
   - **a)** Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}.$$
   - **b)** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Justifier que les expressions obtenues par la méthode 1 et par la méthode 2 sont égales.

Les fonctions

Exercice n°6 :

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

   On admet pour la suite que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
2. On introduit la fonction auxiliaire g définie par $g : x \mapsto x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \mapsto 3x^3 - x - 2$.
   - **a)** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.

     On admet pour la suite que g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$.
   - **b)** Déterminer une racine évidente $\alpha \in \mathbb{R}$ de P, puis montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.

     On admet pour la suite que $a = b = 3$ et $c = 2$.
   - **c)** En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
   - **d)** Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, on a :
   $$g'(x) = \frac{P(x)}{x}.$$
   - **e)** En déduire les variations de g sur son ensemble de définition (on ne demande pas les limites).
   - **f)** Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x) > 0$.

3. Etude de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

b) En déduire les variations de f, on donnera la limite en 0 et on en donnera une interprétation géométrique.

4. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Etude de l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$. *On dit que la droite* Δ *d'équation* $y = x + 1$ *est asymptote oblique à* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$. *On cherche à étudier la position relative de* $\mathscr{C}_f$ *et de* Δ.

a) On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Etudier les variations de h (on ne demande pas les limites). Calculer $h(1)$.

b) En déduire le signe de $f(x) - (x+1)$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

6. Représentation graphique

Dans un repère, tracer tracer T, Δ ainsi que les éventuelles asymptotes horizontales et verticales de $\mathscr{C}_f$. Tracer alors l'allure de la courbe représentative de f.

7. Python

Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆