DS n°2 de Mathématiques

Lundi 13 Novembre 2023, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 :

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $\dfrac{e^{3x^2+x+1}}{e^{1-x}} < \exp(2x+1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln\left(\dfrac{3x+1}{2x-4}\right) \geq 0$.

Exercice n°2 :

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 5$, $a_1 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$.
Déterminer une expression explicite de a_n en fonction de n.

Exercice n°3 :

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}.$$

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice n°4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n < 0$.
2. **Python :** Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel n non nul et qui affiche les valeurs u_k pour $k \in [\![1; n]\!]$.
3. On introduit une suite auxiliaire $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   a) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = 3w_n - 2.$$

   b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
4. Déterminer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2k(3k - k^2) \qquad B_n = \sum_{k=n+1}^{n^2} 4 \qquad C_n = \sum_{k=3}^{2n} \frac{3}{2^{2k+1}}.$$

Exercice n°6 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 8x + 3 = 0$. En déduire une forme factorisée de $4x^2 + 8x + 3$.

2. Développer $(2x + 3)(2x + 1)$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right)$.

Exercice n°7 :
On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 2b_n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression explicite de b_n en fonction de n.

2. On considère la suite auxiliaire $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.

- **a)** A quel type de suites usuelles appartient la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- **b)** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de c_n en fonction de n.
- **c)** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n2^{n-1}$.

3. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

- **b)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$.
- **c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. **Déduire des questions précédentes** que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n - 1)2^n + 1$.

Exercice n°8 :
On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

On admet pour la suite que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

2. **Python :** Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

3. On introduit la fonction auxiliaire g définie par $g : x \mapsto x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \mapsto 3x^3 - x - 2$.

- **a)** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.

  On admet pour la suite que g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$.
- **b)** Déterminer une racine évidente $\alpha \in \mathbb{R}$ de P, puis montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.

  On admet pour la suite que $a = b = 3$ et $c = 2$.
- **c)** En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, on a : $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$.
- **e)** En déduire les variations de g sur son ensemble de définition (on ne demande pas les limites) puis le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_g$.

4. Etude de la fonction f.

- **a)** Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
- **b)** En déduire les variations de f.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆