

Exercice n°1 :

1) from math import *

def fonction(x):

if x > 0:

return x+1 + (x-1+log(x))/x ** 2

else:

print(x, "n'appartient pas à]0; +∞[")

2) a) Une racine évidente est 1. Par division euclidienne, on obtient:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - x - 2 & x-1 \\ 3x^3 - 3x^2 + 3x + 2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{Donc: } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

b) Le discriminant du trinôme $3x^2 + 3x + 2$ est $3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -15 < 0$.

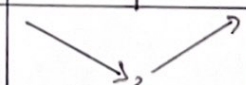
Ainsi il est du signe de son coefficient dominant et donc:

$\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 3x + 2 > 0$. L'expression $P(x)$ a le signe de $x-1$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
• $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$
• $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

c) Soit $x > 0$. On a: $g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{P(x)}{x}$.

d) Le signe de $g'(x)$ est le signe de $P(x)$ (car $x > 0$). On déduit de 2)b) le tableau suivant:

x	0	1	+∞
g'(x)		-	+
g			

e) On déduit de d) que: $\forall x > 0, g(x) \geq 3 > 0$.

3) a) Soit $x > 0$. On a: $f'(x) = 1 + \frac{(1 + \frac{1}{x})x^2 - (x-1+\ln(x)) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{x+1 - 2(x-1+\ln(x))}{x^3} \\
 &= \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} \\
 &= \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

(2)

b) Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ (car $x^3 > 0$). On déduit de 2)c) que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n°2:

1) Le réel -1 est racine évidente de $2x^2 + 3x + 1$. Par division euclidienne, on a:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 + 3x + 1 & x+1 \\
 \underline{x+1} & 2x+1 \\
 0 &
 \end{array}
 \quad \text{Donc: } \forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x + 1 = (x+1)(2x+1)$$

2) Le discriminant de $4x^2 + 8x + 3$ est $8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 > 0$, les racines associées sont: $\frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$. La factorisation exacte est: $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 8x + 3 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x+3)(2x+1)$.

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{>1}$, la propriété $P(n)$: " $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ ".

• $P(1)$ vraie car: $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^{>1}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$: " $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n+1}{2n+3}$ ".

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} \\
 &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+1} \quad [\text{par hypothèse de récurrence}] \\
 &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \quad [\text{par 2)}] \\
 &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &\stackrel{[\text{par 1)}]}{=} \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \quad \text{Donc } P(n+1) \text{ vraie.}
 \end{aligned}$$

Exercice n°3

1) def suite1(n):

$$u = -3/4$$

for k in range(n):

$$u = -(3 + 4 * u) / (1 + 2 * u)$$

return u

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'une part:

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{3 + 4u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{1}{\frac{-2 - 2u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{-1 - 2u_n}{2 + 2u_n}$$

$$\text{et d'autre part: } \frac{1}{2}w_n - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u_n + 1} - 1 = \frac{1 - (2 + 2u_n)}{2u_n + 2} = \frac{-1 - 2u_n}{2 + 2u_n}$$

$$\text{Donc: } \underline{w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n - 1.}$$

$$\text{b) On a: } \underline{\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2.}$$

$$3) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a: } w_n = \frac{1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{w_n} - 1.$$

$$\text{Par conséquent: } \underline{u_n = \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2} - 1 = \frac{3 \cdot 2^n - 6}{6 - 2^{n+2}}.}$$

4) def seuil(M):

$$n = 0$$

while $-3/2 - M \geq \text{suite1}(n)$ or $\text{suite1}(n) \geq -3/2$:

$$n = n + 1$$

return n

Exercice n°4:

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}_+^*. \text{ On a: } \underline{\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + b x(n+2) + c x(n+1)}{x(n+1)(n+2)}} \\ = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(n+1)(n+2)}$$

Par conséquent :

(4)

$$\forall n > 0, f(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \iff \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \quad [\text{par identification polynôme}]$$

$$\iff \begin{cases} b+c = -1/2 \\ 2b+c = -3/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1/2 \\ b = -1 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \forall n > 0, f(n) = \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$$

2) a) def somme 1(n) :

$$S = 0$$

for k in range(1, n+1):

$$S += 1 / (k * (k+1) * (k+2))$$

return S

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2} \right) \quad [\text{par 1}]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \quad [\text{par linéarité}]$$

c) On reconnaît deux sommes télescopiques et on trouve :

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

Exercice n°5 :

(5)

1) def suite2(n):

$$u = -2$$

$$v = 2$$

for k in range(1, n):

$$(u, v) = (v, -3 \times v + 18u)$$

return u

2) def somme2(n):

$$S = 0$$

for k in range(1, n+1):

$$S += \text{suite2}(k)$$

return S

3) La suite (u_n) est linéaire récurrente d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 3x - 18 = 0$ dont les racines sont : 3 et -6. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^{>1}, u_n = \lambda 3^n + \mu (-6)^n$.

$$\text{Enfin: } \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 6\mu = -2 \\ 9\lambda + 36\mu = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 6\mu = -2 \\ 54\mu = 8 \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}^{>1}, u_n = -\frac{10}{27} 3^n + \frac{4}{27} (-6)^n \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{10}{27} \\ \mu = \frac{4}{27} \end{cases}$$

$$4) \text{ On a: } \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{10}{27} 3^k + \frac{4}{27} (-6)^k \right)$$

$$= -\frac{10}{27} \sum_{k=1}^n 3^k + \frac{4}{27} \sum_{k=1}^n (-6)^k$$

$$= -\frac{10}{27} \cdot 3 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} + \frac{4}{27} \cdot (-6) \cdot \frac{1-(-6)^n}{1-(-6)}$$

$$= \frac{5}{9} (1-3^n) - \frac{8}{63} (1-(-6)^n)$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{5}{9} 3^n + \frac{8}{63} (-6)^n$$

Exercice n° 6 :

⑥

Partie I

1) La suite (b_n) est géométrique de raison 2 et $b_0 = 1$, ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^n$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

Donc (c_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et $c_0 = 0$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{n}{2}$.

b) Comme $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, on a : $a_n = 2^n c_n = 2^n \frac{n}{2} = n 2^{n-1}$.

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $a_{k+1} = 2a_k + b_k$ i.e. $a_{k+1} - a_k - b_k = a_k$
ou encore, par 1), $a_{k+1} - a_k - 2^k = a_k$.

b) $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$.

c) On a : $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} \stackrel{2)b)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \stackrel{3)a)}{=} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k - 2^k)$

d) On a : $\sum_{k=1}^n k 2^k = 2 \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) 2^{n+1} + 2$

livrant : $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=1}^n 2^k$
téléscopique

3)b) $= a_{n+1} - a_1 - (2^{n+1} - 2)$

2)b) $= (n+1) 2^n - 1 - (2^{n+1} - 2)$

$= (n-1) 2^n + 1$

Partie II

4) $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$.

5) G_{na} :

(7)

$$\sum_{n=1}^N a_n B_n \stackrel{4)}{=} \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) B_n$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{n=1}^N A_n B_n - \sum_{n=1}^N A_{n-1} B_n$$

$$= \sum_{n=1}^N A_n B_n - \sum_{i=0}^{N-1} A_i B_{i+1} \quad [\text{avec } i = n-1]$$

$$= A_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n B_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n B_{n+1} - \underbrace{A_0 B_1}_{=0}$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} (A_n B_{n+1} - A_n B_n)$$

$$= A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (B_{n+1} - B_n)$$

$$= A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1}$$

6) G_n pose: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n$ et $b_n = 1$. $G_{na}: B_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n 1 = n$.

Ainsi, en appliquant 5), on obtient:

$$\sum_{n=1}^N 2^n = \sum_{n=1}^N a_n B_n = A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1}$$

$$= (2^{N+1} - 2)N - \sum_{n=1}^{N-1} (2^{n+1} - 2)$$

$$= N 2^{N+1} - 2N - \sum_{n=1}^{N-1} 2^{n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} 2$$

$$= N 2^{N+1} - 2N - (2^{N+1} - 4) + 2(N-1)$$

$$= (N-1) 2^{N+1} + 2$$