Correction DS n° 2

Exercice n° 1 :

1) L'ensemble de définition de (E) est $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^{3x^2+x+1}}{e^{1-x}} < \exp(2x+1) \iff \exp\left(3x^2+x+1-(1-x)\right) < \exp(2x+1)$$

$$\iff \exp(3x^2+2x) < \exp(2x+1)$$

$$\iff 3x^2+2x < 2x+1 \quad \left[\begin{array}{l}\text{par stricte croissance de}\\ \exp \text{ sur } \mathbb{R}\end{array}\right]$$

$$\iff x^2 < \frac{1}{3}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

2) On note $D_{(I)}$ l'ensemble de définition de (I). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D_{(I)} \iff \begin{cases} 2x-4 \neq 0 \\ \text{et} \\ \dfrac{3x+1}{2x-4} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 2 \\ \text{et} \\ \dfrac{3x+1}{2x-4} > 0 \end{cases}$$

D'autre part :

x	$-\infty$		$-1/3$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+1}{2x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi :

$x \in D_{(I)} \iff x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup]2 ; +\infty[$

et $D_{(I)} = \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup]2 ; +\infty[$

Soit $x \in D_{(I)}$. On a :

$$\ln\left(\frac{3x+1}{2x-4}\right) \geqslant 0 \iff \frac{3x+1}{2x-4} \geqslant 1 \quad \left[\begin{array}{l}\text{par stricte croissance}\\ \text{de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\end{array}\right]$$

$$\iff \frac{3x+1}{2x-4} - 1 \geqslant 0$$

$$\iff \frac{x+5}{2x-4} \geqslant 0$$

De plus, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+5}{2x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I) est : $\left(]-\infty ; -5] \cup]2 ; +\infty[\right) \cap D_{(I)} =]-\infty ; -5] \cup]2 ; +\infty[$

Exercice n°2 : La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $x^2-4x-5=0$, son discriminant est $(-4)^2-4.1.(-5)=36>0$ et ses racines sont :

$$\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{4-6}{2}=-1 \quad \text{et} \quad \frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\times 1}=5.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\lambda(-1)^n+\mu 5^n}$$

Déterminons λ et μ. On a :

$$\begin{cases} a_0=5 \\ a_1=7 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(-1)^0+\mu 5^0=5 \\ \lambda(-1)^1+\mu 5^1=7 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu=5 \\ -\lambda+5\mu=7 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu=5 \\ 6\mu=12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda=3 \\ \mu=2 \end{cases}$$

Donc : $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=3(-1)^n+2.5^n}$

Exercice n°3 :

1) $$v_0=\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{(0+1)(0+2)}=\frac{1}{2}$$

$$v_1=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$v_2=\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

2) Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2} \iff \frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(a+b)k+2a+b}{(k+1)(k+2)}$$

$$\iff 1=(a+b)k+2a+b$$

$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \quad [\text{par identification}]$$

$$\iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Donc :

$$\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \left[\text{cette somme est télescopique} \right]$$

$$= \frac{1}{0+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

Exercice n° 4 :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: " u_n existe et $u_n < 0$ ".

- $P(0)$ est vraie car $u_0 = -1$, donc u_0 existe par hypothèse et $u_0 < 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence u_n existe et $u_n < 0$. En particulier $u_n \neq \frac{3}{2}$ donc $\frac{u_n}{3-2u_n} = u_{n+1}$ existe. D'autre part, comme $u_n < 0$, on déduit que $3 - 2u_n > 0$. Par conséquent $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n} < 0$ et $P(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)
```
n = int(input('Entrez un entier positif non nul'))
u = -1
for k in range(1,n+1):
    u = u / (3-2*u)
    print(u)
```

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3-2u_n}{u_n} = 3 \cdot \frac{1}{u_n} - 2 = 3w_n - 2.$$

Donc $\underline{w_{n+1} = 3w_n - 2}$.

b) • La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

• Le réel $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $\ell = 3\ell - 2$ est $\ell = 1$.

• Montrons que la suite $(w_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$w_{n+1} - 1 = (3w_n - 2) - 1 = 3(w_n - 1).$$

• Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n - 1 = (w_0 - 1) \times 3^n = \left(\frac{1}{u_0} - 1\right) \times 3^n = (-2) \times 3^n$.

ie $\underline{w_n = 1 - 2 \times 3^n}$

c) On déduit de la question précédente que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{w_n} = \frac{1}{1 - 2.3^n}}$

Exercice n° 5 :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2k(3k - k^2) = \sum_{k=1}^{n+1} (6k^2 - 2k^3)$$

$$= 6 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \quad [\text{par linéarité}]$$

$$= 6\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 2\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2)(2n+3) - (n+1)^2(n+2)^2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)[2(2n+3) - (n+1)(n+2)]}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(4 + n - n^2)}{2}$$

$$B_n = \sum_{k=n+1}^{n^2} 4 = 4(n^2 - (n+1) + 1) = \underline{4n(n-1)}$$

$$C_n = \sum_{k=3}^{2n} \frac{3}{2^{2k+1}} = \sum_{k=3}^{2n} \frac{3}{2 \times 4^k} = \frac{3}{2} \sum_{k=3}^{2n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad [\text{par linéarité}]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-3+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{32}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}\right)$$

Exercice n°6 :

1) Le discriminant du trinôme $4x^2+8x+3$ est $8^2-4.4.3=16>0$, ses racines sont : $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. On en déduit la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x^2+8x+3 = 4\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= 4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$= (2x+3)(2x+1)$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ (2x+3)(2x+1) = 4x^2+8x+3$.

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$"

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4.1^2-1} = \frac{1}{3}$

  et $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2.1+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$: "$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right)$"

  On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{4n^2+8n+3} \quad \text{[par hypothèse de récurrence]}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \quad \text{[par 2)]}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(2n+3)-2}{2(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{2(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $(P(n))$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°7 :

1) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison 2.
Donc : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = b_0 \cdot 2^n = 2^n}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n + b_n}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n}{2^{n+1}} + \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

$$= \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

$$= c_n + \frac{1}{2}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b) On en déduit que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = c_0 + n \times \frac{1}{2} = \frac{a_0}{2^0} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\underline{a_n = 2^n c_n = 2^n \times \frac{n}{2} = \frac{2^n}{2} n = 2^{n-1} n}$.

3) a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \underline{2^{n+1} - 1}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$a_{k+1} - a_k - 2^k = 2^k(k+1) - 2^{k-1}k - 2^k$$

$$= 2^k(k+1-1) - 2^{k-1}k$$

$$= 2^k k - 2^{k-1}k$$

$$= 2 \times 2^{k-1}k - 2^{k-1}k$$

$$= 2^{k-1}k$$

$$= a_k$$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{3)b)}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k - 2^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$ est télescopique et vaut $a_{n+1} - a_0 = 2^n(n+1)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} \overset{3)a)}{=} 2^n(n+1) - (2^{n+1} - 1) = 2^n n + 2^n - 2 \cdot 2^n + 1 = \underline{2^n(n-1) + 1}.$$

Exercice n°8 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \in D_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \iff x > 0$.

Donc $\underline{D_f = \mathbb{R}_+^*}$.

2)
```
from math import*
def f(x):
    if x>0:
        return x+1 + (x-1+log(x))/x**2
    else:
        print(x, "n'appartient pas à Df")
```

3) a) $\underline{D_g = \mathbb{R}_+^*}$

b) La valeur 1 est racine évidente de P. Par division euclidienne on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} 3x^2-x-2 & 3x^2+3x+2 \\ 2x-2 & \\ 0 & \end{array}$$

Donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)}$

c) Le discriminant de $3x^2+3x+2$ est $-15<0$ et son coefficient dominant est strictement positif, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^2+3x+2>0$. Le signe de P est le signe de $x-1$ ie

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

d) Soit $x \in D_g$. On a : $\underline{g'(x) = (x^3-x+3-2\ln x)' = 3x^2-1-\frac{2}{x} = \frac{3x^2-x-2}{x} = \frac{P(x)}{x}}$

e) Etant donné que $D_g = \mathbb{R}_+^*$, le signe de $g'(x)$ est celui de $P(x)$. On en déduit le tableau de variation suivant :

Donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \geq 3 > 0}$ et $\underline{g(x) \text{ est strictement positif}}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	3	$\nearrow$	

4) a) Soit $x \in D_f$. On a

$$\underline{f'(x) = 1 + \frac{(x-1+\ln x)'x^2 - (x-1+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}}$$

$$= 1 + \frac{(1+1/x)x^2 - (x-1+\ln x)2x}{x^4}$$

$$= \frac{x^3+x+1-(2x-2+2\ln x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	