Devoir surveillé n°3, lundi 30 novembre 2020

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Déterminer les racines carrées de $-48+14i$. (On pourra utiliser : $\sqrt{48^2+14^2}=50$).
2. Déterminer les racines cubiques de $1-i$.
   On donnera leur expression sous forme trigonométrique.
3. Déterminer les racines cubiques de $-8i$.
   On donnera leur expression sous forme trigonométrique puis algébrique.
4. Résoudre l'équation (E_1) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^2+(-1+9i)z-8-8i=0.$$
5. On considère l'équation (E_2) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^6+(-1+9i)z^3-8-8i=0.$$
   Donner la forme trigonométrique des solutions de (E_2).

Exercice n°2 Etude d'une équations de degré 3

On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x+1$.

1. Prouver que l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $P(x)=0$ possède exactement trois solutions réelles.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$.
3. Déterminer alors les valeurs du réel θ telles que $P(2\cos(\theta))=0$.
4. Conclure sur les trois racines de P.

Exercice n°3 Calcul d'un somme à l'aide des nombres complexes

1. Soient $x \in]0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme

$$A = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

   Simplifier cette somme et la mettre sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $r, \alpha \in \mathbb{R}$.

2. On suppose maintenant que $n \geqslant 2$, et on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

   (a) Justifier que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   (b) A l'aide de la question 1., prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

   (c) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°4 Résolutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) On considère la fonction $f : t \to \dfrac{1}{t^2 + 4t + 8}$.
   Etudier l'existence puis déterminer une primitive de f.

   (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) :\ \forall t \in \mathbb{R},\ (1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 8}$.

2. (a) Déterminer une solution particulière à l'équation :

$$(E_c) : \quad \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{(1+i)t}.$$

   (b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin(x)e^x.$$

Exercice n°5 Résoudre une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(P) : \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \boxed{\text{et}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x$$

On raisonne par analyse-synthèse.

1. **Analyse :** Soit f une fonction vérifiant (P).

   (a) Justifier le fait que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants à déterminer.

   (c) En déduire la forme sous laquelle s'écrit nécessairement la fonction f.

2. **Synthèse :** Déterminer, parmi les fonctions candidates obtenues à la question précédente, quelles sont celles qui vérifient effectivement (P).

3. Conclure.

Exercice n°6 Etablir une relation

L'objectif de cet exercice est d'établir la relation :

$$(\star) : \quad \forall x \in [-2;2], \quad \arcsin\left(\frac{4x}{4+x^2}\right) = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. **Préliminaires :**
   (a) Rappeler la définition de chacune des fonctions $\arcsin$ et $\arctan$, puis leurs ensembles de continuité et de dérivabilité.
   (b) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \dfrac{4x}{4+x^2} \leqslant 1.$
   (c) En déduire que chacun des termes présents dans $(\star)$ est bien défini sur $[-2;2]$.
2. **Méthode n°1 :**
   On considère la fonction $f : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right) - 2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, définie sur $[-2;2]$.
   (a) Déterminer les ensembles de continuité et de dérivabilité de f.
   (b) Etudier la fonction f.
   (c) En déduire la relation $(\star)$.
3. **Méthode n°2 :**
   Soit $x \in]-2;2[$. On note : $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right)$ et $\beta = 2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   (a) Justifier que : $\forall y \in [-1;1], \quad \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}.$
   (b) Justifier l'existence des quantités $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$, puis les comparer.
   (c) En déduire la relation $(\star)$.

Exercice n°7 Résolution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation :

$$(E) : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x.$$

1. Résoudre (E_1) : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t.$
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t)$.
   (a) Justifier que z est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que z est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.
   (b) Justifier que z' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z''(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.
   (c) En déduire que z est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $y(x)$ à l'aide de la fonction z, puis résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆