DS n°3 de Mathématiques
Lundi 9 Janvier 2023, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Systèmes linéaires

Exercice n°1 : (Résoudre des systèmes linéaires avec ou sans paramètre)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & a \\ 3x & + & 5y & - & z & = & b \\ 4x & + & 6y & + & 4z & = & c \end{array}\right.$$

3. On considère le système linéaire suivant où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre

$$(S_3)\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-k)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-k)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (3-k)z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Montrer que le système linéaire (S_3) est de Cramer si et seulement si $k \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1; 4\}$.

b) Résoudre le système (S_3) en fonction du paramètre $k \in \mathbb{R}$.

Tournez la page —>

Suites usuelles et sommes

Exercice n°2 : (Suites usuelles et calculs de sommes)

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 5$, $v_0 = 3$, $w_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer une formule explicite pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $t_n = u_n + v_n$ est géométrique et en déduire une expression de $u_n + v_n$ en fonction de n.
2. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n - v_n$. Reconnaître la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire une expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.
3. Déduire des deux questions précédentes une expression de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. En utilisant le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_n + w_n$, exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ en fonction de w_n ; en déduire une expression de w_n en fonction de n. Vérifier que cette formule reste valide dans le cas où $n = 0$.

Récurrence et sommes

Exercice n°3 : (Récurrence, sommes télescopiques et sommes doubles)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

L'objectif de cet exercice est de proposer trois méthodes permettant de justifier la relation $(\star)$ suivante

$$(\star) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

L'objectif étant de montrer la relation $(\star)$, on s'interdira de l'utiliser dans les calculs

1. **Méthode n°1 : (par récurrence)** Montrer $(\star)$ par récurrence.
2. **Méthode n°2 : (par somme télescopique)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right].$$

   a) Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ (on utilisera ce résultat sans démonstration).

   b) Développer l'expression sous la somme T_n. Déduire une expression de S_n en fonction de T_n.

   c) Rappeler le théorème des sommes télescopiques. Calculer T_n.

   d) En déduire la relation $(\star)$.

3. **Méthode n°3 : (par somme double)** Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère la somme double triangulaire

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j$$

   Calculer cette somme double de <u>deux manières différentes</u> et en déduire $(\star)$.

Tournez la page —>

Exercice n°4 : (Formule explicite d'une somme)

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On cherche à calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right).$$

b) En déduire la valeur de la somme S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Fonctions, inégalités et suite récurrente

Exercice n°5 : (Etude d'une fonction et inégalités)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. Justifier que f est une fonction paire.

On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $0 \leq f'(x) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

Indication : il y a trois inégalités à justifier.

Exercice n°6 : Etude d'une suite récurrente

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ telle que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

On admet que f est dérivable deux fois sur $]0;+\infty[$. Autrement dit f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (sa dérivée est notée f') et f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ (sa dérivée est notée f'').

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

On admettra que $2 < e < 3$ *, que* $\dfrac{1}{2} < \ln(2) < 1$ *, et que* $1 < \ln(3) < \dfrac{11}{10}$.

Partie I : Etudes des fonctions f et f'

1. Montrer que l'équation, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x$ possède une unique solution α que vous expliciterez. Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

3. En déduire le tableau de variation de f' sur $]0;+\infty[$.
Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$, puis les inscrire dans le tableau.

4. En déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Construire le tableau de variation, on fera apparaître α et les limites en 0^+ et $+\infty$.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *et que* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

5. Python : Ecrire un programme python permettant de réaliser une représentation graphique de la fonction f sur le segment $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Cette représentation doit comporter un titre et une légende.

Partie II : Etude du comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

L'objectif de cette partie est d'étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes puis d'étudier sa convergence.
On pourra utiliser les résultats de la partie précédente. Le cas échéant, on précisera clairement le résultat de la partie I utilisé.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et que $u_n > \alpha$.

2. Python : Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur un entier n positif et qui affiche la valeur de u_n.

3. Etude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, méthode n°1

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4. Etude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, méthode n°2

a) Etudier le signe de l'expression $f(x) - x$ sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

5. Etude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Justifier que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

b) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha).$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - \alpha \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

6. Python : Ecrire une fonction python prenant pour argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoyant la valeur du premier rang n tel que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$