DS n°3 de Mathématiques

Lundi 3 Janvier 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : Système linéaire à paramètre

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S_k) \ : \ \begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+2kz=-4 \end{cases}$$

1. Dans cette question seulement, on suppose que $k=1$.
Déterminer l'ensemble des solutions de (S_k).

2. Dans cette question seulement, on suppose que $k=\dfrac{1}{2}$.
Déterminer l'ensemble des solutions de (S_k).

3. Dans cette question, k est un réel quelconque.

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k le système (S_k) est-il de Cramer ?

b) Déterminer l'ensemble des solutions de ce système en fonction du paramètre $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2 : Révisions - Suites usuelles, sommes, limites

Les questions trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$, $u_1=\dfrac{5}{6}$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{6}u_n+\dfrac{2}{3}$.

Déterminer u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0=1$, $u_1=\dfrac{7}{6}$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}=\dfrac{7}{6}v_{n+1}-\dfrac{1}{6}v_n$.

Déterminer v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

3. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :

$$x_n = 1-3.2^n \qquad \text{et} \qquad y_n = 1-2n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ et $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{B_n}{A_n}$.

Exercice n°3 : Etude simultanée de la convergence de deux suites

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ 2^n \geq n+1$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}.$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) Que peut-on en déduire ?

3. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un entier naturel non nul n et qui renvoie la valeur de u_n.

Exercice n°4 : Etude d'une suite récurrente

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ telle que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.
On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)} \end{cases}$$

Valeur numérique : on rappelle que $e = e^1 \approx 2,7$.

1. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln(x) - 1$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
Vous préciserez, en justifiant, les limites de f en 1^+ et $+\infty$.

3. Ecrire un programme python permettant de réaliser une représentation graphique de la fonction f sur le segment $[2;3]$. Cette représentation doit comporter un titre et une légende.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]1;+\infty[$.

b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $]1;+\infty[$.

5. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

b) Justifier que la suite (u_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge et justifier que sa limite est e.

6. L'objectif de cette question est de démontrer d'une autre manière que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

a) Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)^2$.

b) Justifier que, pour tout $x \in [e;+\infty[$, $-1 \leq 1 - \dfrac{2}{\ln x} \leq 1$.

c) En déduire que, pour tout $x \in [e;+\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

d) **On admet que**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

e) Retrouver ainsi la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Ecrire une fonction python prenant pour argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoyant la valeur du premier rang n tel que u_n soit une valeur approchée de e à ε près.

Exercice n°5 : Puissances de matrices et suites

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3.$$

1. **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^n pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = 3^n I_3 + n3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}B^2.$$

3. Expliciter les 9 coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes : $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3w_n \end{cases}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$.

b) En raisonnant par récurrence, montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c) Déduire des questions précédentes les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆