# DS n°3 de Mathématiques
## Lundi 8 Janvier 2024, de 8h à 12h

*Calculatrice non autorisée*

**Éléments de présentation de la copie :** Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

**Exercice n°1 :**

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S_k) \ : \left\{ \begin{array}{c} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+2kz=-4 \end{array} \right.$$

**1.** Dans cette question seulement, on suppose que $k=1$.
Déterminer l'ensemble des solutions de $(S_k)$.

**2.** Dans cette question seulement, on suppose que $k=\dfrac{1}{2}$.
Déterminer l'ensemble des solutions de $(S_k)$.

**3.** Dans cette question, $k$ est un réel quelconque.

**a)** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $k$ le système $(S_k)$ est-il de Cramer ?

**b)** Déterminer l'ensemble des solutions de ce système en fonction du paramètre $k \in \mathbb{R}$.

**Exercice n°2 :**

On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

**1.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Déduire de la question précédente que : $\sqrt{n+1}-1 \leq R_n$.

**3.** En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ possède une limite et la préciser.

**Exercice n°3 :**

On considère les matrices carrées $A$ et $B$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 2I_3.$$

**1.** **a)** Calculer $B$, $B^2$ et $B^3$.

**b)** En déduire $B^n$ pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

**2.** A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2.$$

**3.** Dans cette question on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \end{cases}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

**a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$.

**b)** En raisonnant par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

**c)** Déduire des questions précédentes les expressions de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice n°4 :**

On considère la suite $(S_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}.$$

On considère également la fonction $f$ définie, pour tout $x \in ]0; +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

*On admet que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $2 < e < 3$.*

**1.** Montrer que $f$ est décroissante sur $[3; +\infty[$.

**2.** En déduire que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

**3.** La suite $(S_n)$ converge-t-elle ? Justifier.

**Exercice n°5 :**

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**1.** **a)** Calculer $A^2$, puis vérifier que $A^2 = 2A + 3I_4$.

**b)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que :

$$A^n = a_n A + b_n I_4,$$

vérifiant, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$.

**2.** Expliciter les 9 coefficients de $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de $a_n$ et $b_n$.

**3.** **a)** Montrer que, pour entier naturel $n$ non nul, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$.

**b)** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, une expression de $a_n$ en fonction de $n$.

**c)** En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression de $b_n$ en fonction de $n$.

**Problème**

On considère la fonction $f$ définie, pour tout $x \in ]0;+\infty[$, par $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

On admet que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que sa dérivée $f'$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. On notera $f''$ la dérivée de $f'$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

*On admettra que* $2 < e < 3$ , *et que* $\dfrac{1}{2} < \ln(2) < 1$.

**Partie I : Etude des fonctions $f'$ et $f$**

1. Montrer que la fonction $f$ possède un unique point fixe $\alpha$ que vous expliciterez.
   Justifier que $0 < \alpha < 1$.
2. Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
3. En déduire que $f'$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Calculer les limites en $0^+$ et en $+\infty$ de la fonction $f'$.
4. En déduire que $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
5. **Python :** Ecrire un programme python permettant de réaliser une représentation graphique de la fonction $f$ sur le segment $[\alpha;1]$. Cette représentation doit comporter un titre et une légende.

**Partie II : Etude du comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

L'objectif de cette partie est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes. On utilisera, en cas de nécessité, les résultats de la partie I. Dans ce cas, on précisera clairement les résultats de la partie I utilisés ainsi que les numéros des questions associées.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien définie et que $\alpha < u_n \leq 1$.
7. **Python :** Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur un entier $n$ positif et qui affiche la valeur de $u_n$.
8. **Première étude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**
   **a)** Etudier le signe de l'expression $f(x) - x$ sur $]0;+\infty[$.
   **b)** En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   **c)** En déduire que $(u_n)$ converge et que sa limite est $\alpha$. Justifier soigneusement.
   **d)** **Python :** Ecrire une fonction python prenant pour argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoyant la valeur du premier rang $n$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$.
9. **Seconde étude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**
   **a)** Justifier que, pour tout $x \in [\alpha;1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   **b)** En déduire que, pour tout $x \in [\alpha;1]$, on a :
   $$0 \leq f(x) - \alpha \leq \frac{1}{2}(x-\alpha).$$
   **c)** En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
   $$0 \leq \frac{u_{k+1}-\alpha}{u_k-\alpha} \leq \frac{1}{2}.$$
   **d)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1-\alpha}{2^n}$.
   **e)** Justifier de nouveau que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆