

Exercice n°1:

$$1) \begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1} \begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0 \\ -3y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ -\frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}z, z \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3x + 5y - z = b \\ 4x + 6y + 4z = c \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -y - 4z = b - 3a \\ -2y = c - 4a \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x = a - 2y - z \\ y = 2a - \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}(3a - b - y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{13}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{7}{8}c \\ y = 2a - \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c \end{cases}$$

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système linéaire (S_2) possède pour unique solution

$$\left(-\frac{13}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{7}{8}c, 2a - \frac{1}{2}c, \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c \right)$$

$$3) \begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = 0 \\ x + y + (3-k)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + (3-k)z = 0 \\ x + (1-k)y + z = 0 \\ (1-k)x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1-k)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + (3-k)z = 0 \\ -ky + (k-2)z = 0 \\ ky + (-2+4k-k^2)z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + y + (3-k)z = 0 \\ -ky + (k-2)z = 0 \\ (-4+5k-k^2)z = 0 \end{cases}$$

Le système linéaire (S_3) est de Cramer si et seulement si $-k \neq 0$ (et) $-k^2 + 5k - 4 \neq 0$ ie lorsque $k \neq 0$ (et) $k \notin \{1, 4\}$. Autrement dit (S_3) de Cramer lorsque $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 4\}$.

b) Dans le cas $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 4\}$, (S_3) est homogène et de Cramer. Par conséquent ②
il possède pour unique solution $(0, 0, 0)$.

□ Dans le cas $k = 0$, on a:

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice n°2:

1) a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B^3 = O_3$.

b) Par récurrence immédiate: $\forall k \in \mathbb{N}^{>3}$, $B^k = O_3$.

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $A^n = 3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2$ ".

• $P(0)$ vraie car $3^0 I_3 + \underbrace{0 \cdot 3^{-1} B}_0 + \underbrace{\frac{0(0-1)}{2} 3^{-2} B^2}_0 = I_3 = A^0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times \left(3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \right) \quad [\text{par hypothèse}] \\ &= (3I_3 + B) \times \left(3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \right) \quad [\text{car } B = A - 3I_3] \\ &= 3^{n+1} I_3 + n 3^n B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-1} B^2 + 3^n B + n 3^{n-1} B^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^3 \\ &= 3^{n+1} I_3 + (n+1) 3^n B + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) 3^{n-1} B^2 \quad \underbrace{= O_3}_{B^3} \\ &= 3^{n+1} I_3 + (n+1) 3^n B + \frac{(n+1)n}{2} 3^{n-1} B^2 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ vraie.

• Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3)

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$A^n = 3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2$$

$$= 3^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n 3^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} * & 2n 3^{n-1} & * \\ * & 3^n + n(n-1) 3^{n-2} & * \\ * & -(n-1)n 3^{n-2} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 2n 3^{n-1} & * \\ * & 3^{n-2} (n^2 - n + 9) & * \\ * & (1-n)n 3^{n-1} & * \end{bmatrix}$$

$$4) a) \text{ On a: } A X_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_n + 2v_n + 2w_n \\ u_n + 3v_n \\ -u_n + 3w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = X_{n+1}.$$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $X_n = A^n X_0$ ".• $P(0)$ vraie car $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } X_{n+1} &= A X_n \quad [\text{par 4) a)}] \\ &= A A^n X_0 \quad [\text{par hypothèse}] \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

• Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$c) \text{ Comme } X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_n = A^n X_0 = \begin{bmatrix} 3 \times 2n 3^{n-1} \\ 3 \times 3^{n-2} (n^2 - n + 9) \\ 3 \times (1-n)n 3^{n-1} \end{bmatrix} \quad [\text{par 3)}]$$

$$\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = 2n 3^n \\ v_n = 3^{n-2} (n^2 - n + 9) \\ w_n = (1-n)n 3^n \end{cases}$$

Exercice n°3 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\square u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} > 0. \text{ Donc } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}$$

$$\begin{aligned} \square v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \left(u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n} = \frac{n2^n - (n+1)2^n + (n+1)}{(n+1)n2^n} \\ &= \frac{n+1 - 2^n}{(n+1)n2^n} \leq 0 \text{ car : } \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, n+1 \geq 2^n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est décroissante.

$$\square v_n - u_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(u_n), (v_n)$ sont adjacentes.

b) Le théorème des suites adjacentes nous assure que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

2) def somme(n) :

$$S = 0$$

for k in range(1, n+1):

$$S += 1/(k * 2^{k-1} * k)$$

return S

Exercice n°4 :

1) a) $A^2 - A = 2I_3$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $A^n = a_n A + b_n I_3$ ".
 $P(0)$ vraie car $A^0 = I_3 = 0.A + 1.I_3$, il suffit de poser $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A^{n+1} &= A \times A^n = A(a_n A + b_n I_3) \quad [\text{par H.R.}] \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n (2I_3 + A) + b_n A \quad [\text{par 1) a)]} \\ &= (a_n + b_n) A + 2a_n I_3 \end{aligned}$$

Il suffit de prouver $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. Donc $P(n+1)$ vraie.

(5)

• Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $a_{n+1} = a_n + b_{n+1} = a_n + 2a_n$.

b) La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $9 > 0$, et de racines: -1 et 2 . Par conséquent, il existe $\lambda, p \in \mathbb{R}$ tels que: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda(-1)^n + p2^n$.

$$\text{De plus: } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + p = 0 \\ -\lambda + 2p = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -p = -\frac{1}{3} \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n)$$

c) On sait que $b_0 = 1$ et que: $\forall n \geq 1, b_n = 2a_{n-1} = \frac{1}{3} (2^n + 2(-1)^{n-1})$

remarque que cette relation est également vraie dans le cas $n=0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $A^n = a_n A + b_n I_3$

$$= \begin{bmatrix} a_n + b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n + b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{où } a_n + b_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^n) \\ \text{et } -a_n = -\frac{1}{3} (2^n - (-1)^n)$$

e) def recurrence(n)

$a = 0$

$b = 1$

for k in range(n)

$(a, b) = (a + b, 2a)$

return (a, b)

Exercice n°5

6

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées.

2) Soit $x > 1$. On a:
$$f'(x) = \frac{(x)' \ln x - x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x) - 1}{(\ln x)^2}$$

3) Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(\ln x) - 1$ sur $]1; +\infty[$ car $(\ln x)^2 > 0$.

Or: $\forall x > 1, (\ln x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$, donc:

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	e	$+\infty$

$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

4) a) Soit $x > 1$. On a $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} - x = 0$

Comme $x > 1$, l'unique point fixe de f est e .

$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{\ln x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = e \end{cases}$

b) Soit $x > 1$. On a: $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(1 - \ln x)}{\ln x} \geq 0$

D'où:

x	1	e	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-

$\Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0$ [car $x > 1$ et $\ln x > 0$]

$\Leftrightarrow e \geq x$

5) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $e \leq u_n$ ".

• $P(0)$ vraie car $u_0 = 3 \geq e$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par hypothèse $e \leq u_n$. Or f est strictement croissante sur $[e; +\infty[$, donc:

$f(e) \leq f(u_n)$ i.e. $e \leq u_{n+1}$. $P(n+1)$ vraie.

• Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $x \in \mathbb{N}$. On sait par 4) b) que: $\forall x \geq c, f(x) - x \leq 0$ et par 5) a) que $u_n \in [c; +\infty[$. Par conséquent: $f(u_n) - u_n \leq 0$ i.e. $u_{n+1} \leq u_n$.
La suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par c , elle converge (par le théorème de la limite monotone) vers $l \geq c$. De plus, par passage à la limite dans la relation: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient:

$l = f(l)$ et l est un point fixe de f qui ne peut être

d) que $l = c$ par 4) a). Donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$
 import math as m
 de f suite(n):

$n = 3$

for k in range(n):

$u = u / (m \cdot \log(u))$

return u

e) Le script construit les $n+1$ premiers points (n étant choisi par l'utilisateur) de la courbe représentative de (u_n) .

6) a) Soit $x \geq e$. On a: $f'(x) = \frac{(\ln x) - 1}{(\ln x)^2} \geq 0$ par 3.

$$\text{De plus: } \frac{1}{4} - f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^2 - 4 \ln x + 4}{4 (\ln x)^2} \\ = \frac{((\ln x) - 2)^2}{4 (\ln x)^2} \geq 0$$

b) Soit $x \geq e$. On sait que le minimum de f sur $]1; +\infty[$ est c [par 3].
 En particulier, $f(x) \geq 0$.

On considère la fonction $h: [c; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}c - f(x)$

On a: $\forall x \geq c, h'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) \geq 0$ [par 6) a)]

Donc h est croissante sur $[e; +\infty[$ et : $\forall n \geq e, \underbrace{h(e)}_{=0} \leq h(n)$. ⑧

Cette dernière relation s'écrit également : $\forall n \geq e, \underline{f(n) \leq \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}e}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 5) a), $u_n \geq e$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$0 \leq \overbrace{f(u_n)}^{u_{n+1}} \leq \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}e$$

ic $\underline{0 \leq u_{n+1} - e \leq \frac{1}{4}(u_n - e)}$

d) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : 0 \leq u_n - e \leq \frac{1}{4^n}$.

• $P(0)$ vraie car $u_0 - e = 3 - e < 1 = \frac{1}{4^0}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $\underline{0 \leq u_{n+1} - e \leq \frac{1}{4}(u_n - e)}$ [par 6) c)]

Donc $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} \quad [\text{par hypothèse}] \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

• Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Comme $\frac{1}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Le théorème d'encadrement nous assure

que $u_n - e \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ic $\underline{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e}$.

7) D'après 6) c), il suffit de déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-10}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 4^n \geq 10^{10}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n &\geq \frac{10 \ln(10)}{\ln(4)} \\ \Leftrightarrow n &\geq \left\lceil \frac{10 \ln(10)}{\ln(4)} \right\rceil \end{aligned}$$

$$= \left\lceil 5 + 5 \frac{\ln 5}{\ln 2} \right\rceil \text{ convient. Or : } 2,3 < \frac{\ln 5}{\ln 2} < 2,4, \text{ donc } 11,5 < 5 + 5 \frac{\ln 5}{\ln 2} < 17.$$

Ainsi, $\underline{n = 17}$, convient.

8) Cette fonction Python prend en argument un flottant ϵ strictement positif (9)
et renvoie une approximation u_n de e à ϵ près (i.e. $0 \leq u_n - e \leq \epsilon$).

En effet, par 6)c), il suffit que $\frac{1}{4^n} \leq \epsilon$ i.e. $n \geq \frac{-\ln(\epsilon)}{\ln 4}$.

Donc $n = \left\lceil \frac{-\ln(\epsilon)}{\ln 4} \right\rceil$ convient et la fonction renvoie u_n approximation de e à ϵ près.