# Correction du DS n°3

## Exercice n°1 :

1) $(S_1)\begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+2z=-4 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2y+z=2 \\ -6y+4z=6 \end{cases}$

$\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de $(S_1)$ est : $\underline{\{(3;-1;0)\}}$

2) $(S_{1/2})\begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+z=-4 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ -2y+z=2 \\ -6y+3z=6 \end{cases}$

$\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ -2y+z=2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1+\frac{1}{2}z \end{cases}$

L'ensemble des solutions de $(S_{1/2})$ est : $\underline{\left\{\left(3;-1+\frac{1}{2}z;z\right) \middle| z\in\mathbb{R}\right\}}$

3) a) Soit $k\in\mathbb{R}$.

$(S_k)\begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ x-4y+2z=7 \\ -2x-2y+2kz=-4 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ -2y+z=2 \\ -6y+2(k+1)z=6 \end{cases}$

$\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x+2y-z=-5 \\ -2y+z=2 \\ (2k-1)z=0 \end{cases}$

Le système linéaire $(S_k)$ sera de Cramer ssi le système linéaire précédent possède trois pivots non nuls. Cela se produira lorsque $2k-1 \neq 0$ ie $\underbrace{k \neq \frac{1}{2}}$.

b) <u>Cas n°1</u> : $k = \frac{1}{2}$ (Voir question 2°/)

<u>Cas n°2</u> : $k \neq \frac{1}{2}$

$$(S_k) \iff \begin{cases} -x + 2y - z = -5 \\ -2y + z = 2 \\ (2k-1)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \quad (\text{car } 2k-1 \neq 0) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $(S_k)$ est $\{(3; -1; 0)\}$.

Exercice n°3 :

1) a) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B^3 = O_3$.

b) Par récurrence immédiate $B^n = O_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$ : " $A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} B + n(n-1) 2^{n-3} B^2$ "

- $P(0)$ vraie car $2^0 I_3 + 0 . 2^{0-1} B + 0(0-1) 2^{0-3} B^2 = I_3 = A^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $A^{n+1} = A^n \times A$

$= \left(2^n I_3 + n 2^{n-1} B + n(n-1) 2^{n-3} B^2\right)\left(2 I_3 + B\right)$ [par hypothèse de récurrence]

$= (2^n I_3)(2 I_3) + (2^n I_3) B + (n 2^{n-1} B)(2 I_3) + (n 2^{n-1} B) B$
$+ (n(n-1) 2^{n-3} B^2)(2 I_3) + (n(n-1) 2^{n-3} B^2) B$

$= 2^{n+1} I_3 + 2^n B + n 2^n B + n 2^{n-1} B^2 + n(n-1) 2^{n-2} B^2$
$+ n(n-1) 2^{n-3} B^3$

$= 2^{n+1} I_3 + (n+1) 2^n B + (n+1) n 2^{n-2} B^2$ [car $B^3 = O_3$ par 1)]

Donc $P(n+1)$ vraie.

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) $X_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_n - v_n - w_n \\ u_n + v_n \\ 2u_n - v_n + w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A X_n$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$ : " $X_n = A^n X_0$ "

- $P(0)$ vraie car $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

On a : $X_{n+1} = A X_n$ [par 3) a)]

$= A A^n X_0$ [par hypothèse de récurrence]

$= A^{n+1} X_0$

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Par la question 2), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \begin{bmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & \cdot & \cdot \\ n\,2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} & \cdot & \cdot \\ n\,2^n + n(n-1)2^{n-3} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Enfin par 3) b), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} \\ n\,2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ n\,2^n + n(n-1)2^{n-3} \end{bmatrix},$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} \\ v_n = n\,2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ w_n = n\,2^n + n(n-1)2^{n-3} \end{cases}$

Exercice n° 4 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2}$

$$= \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \ln x$ car $x^2 > 0$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \ln x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln x \iff e \geqslant x$

Donc $f'(x)$ est positive sur $]0;e]$ et négative sur $[e;+\infty[$.

Par conséquent $f$ est décroissante sur $[e;+\infty[$ et comme $[3;+\infty[ \subset [e;+\infty[$ (car $e<3$)

$f$ est décroissante sur $[3;+\infty[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a :

- $S_{2n+2} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2k} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$

$$= (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

$$= f(2n+2) - f(2n+1).$$

Enfin, comme $2n+1, 2n+2 \in [3;+\infty[$ et $f$ décroissante sur $[3;+\infty[$ par 1), on déduit que $S_{2n+2} - S_{2n} = f(2n+2) - f(2n+1) \leqslant 0$.

Donc $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ décroissante.

- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$

$$= (-1)^{2n+3} \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}$$

$$= f(2n+2) - f(2n+3) \geqslant 0$$ par décroissante de $f$ sur $[3;+\infty[$.

Donc $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ croissante.

- $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = -\dfrac{\ln n}{n} \dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

3) Les suites extraites des indices pairs et impairs $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ de $(S_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite. Par conséquent $(S_n)$ converge vers cette limite.

Exercice n°5 :

1) a) $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ainsi $A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 I_4$

D'où $\underline{A^2 = 2A + 3I_4}$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$\mathcal{P}(n)$ : " il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_4$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car, en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a : $A^0 = I_4 = a_0 A + b_0 I_4$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_4$

On a :

$A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n I_4) A = a_n A^2 + b_n A$

$= a_n (2A + 3I_4) + b_n A$ [par 1)a)]

$= (2a_n + b_n) A + 3a_n I_4$

En posant $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$, on a :

$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_4$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A^n = a_n A + b_n I_4 = \begin{bmatrix} b_n & a_n & a_n & a_n \\ a_n & b_n & a_n & a_n \\ a_n & a_n & b_n & a_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n \end{bmatrix}$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par 1) b) :

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+1} + 3a_n$.

b) D'après 3) a), la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est linéaire récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2x - 3 = 0$ dont les racines sont $-1$ et $3$.

Par conséquent, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda(-1)^n + \mu\, 3^n.$$

Déterminons $\lambda$ et $\mu$. Premièrement $a_1 = 2a_0 + b_0 = 1$, par suite :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $b_n = a_{n+1} - 2a_n = \dfrac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{4} - 2\,\dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$

$$= \frac{3.3^n + (-1)^n - 2.3^n + 2.(-1)^n}{4}$$

$$= \frac{3^n + 3.(-1)^n}{4}$$

# Problème

## Partie I

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f(x) = x \iff x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x$

$$\iff x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\iff \frac{1}{x} = e-1$$

$$\iff x = \frac{1}{e-1}$$

De plus, comme $2<e<3$, on a : $\frac{1}{2} < \frac{1}{e-1} < 1$.

Donc $f$ possède un unique point fixe $\alpha = \frac{1}{e-1}$ et $\alpha \in ]0;1[$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f'(x) = (x)' \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

et $f''(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)'$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

3) Par 2) $f''(x)$ est strictement négatif pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, par conséquent, $f'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$
- $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

On résume cela dans le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

4) On déduit de 3) que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$.
Par conséquent <u>$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$</u>.

5)
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return x * np.log(1 + 1/x)
X = np.linspace(1/(np.e -1), 1, 10**3)
Y = f(X)
plt.plot(X, Y, label = "fonction f")
plt.title("Tracé de la fonction f sur [α,1]")
plt.legend()
plt.show()
```

## Partie II

6) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n$ bien définie et $\alpha < u_n \leq 1$".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $u_0$ bien définie par hypothèse et $u_0 = 1$ donc $\alpha < u_0 \leq 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence $u_n$ est bien définie et $\alpha < u_n \leq 1$.

En particulier $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, donc $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien définie.

La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi de $\alpha < u_n \leq 1$ on déduit que $f(\alpha) < f(u_n) \leq f(1)$ ie $\alpha < u_{n+1} \leq \ln 2 \leq 1$.

(car $f(\alpha) = \alpha$ par 1) et $\ln 2 < 1$). Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7)
```
import math as m
n = int(input(" Entrez un entier positif"))
u = 1
for k in range(n):
    u = u * m.log(1 + 1/u)
print(u)
```

8) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f(x) - x \geq 0 \iff x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right) \geq 0$.

$\iff \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 \geq 0$ [car $x>0$]

$\iff 1 + \frac{1}{x} \geq e$

$\iff x \leq \frac{1}{e-1}$

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

b) On sait, par 6), que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) - u_n \leq 0$ [par 8) a)] ie $u_{n+1} \leq u_n$.

Donc $(u_n)$ est décroissante.

c) La suite $(u_n)$ est donc décroissante et minorée par $\alpha$. Le théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in [\alpha, 1]$. En passant à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient donc $\ell = f(\ell)$ et $\ell$ est

un point fixe de $f$ appartenant à $[\alpha, 1]$. Donc $\underline{\ell = \alpha}$ par 1).

d)
```
import math as m
def seuil(eps):
    u = 1
    n = 0
    while m.abs(u - 1/(m.e - 1)) > eps:
        u = u * m.log(1 + 1/u)
        n = n+1
    return n
```

9) a) D'après 3), $f'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent, on déduit de $\alpha \leqslant x \leqslant 1$ que $f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(\alpha)$

ie $\ln 2 - \frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha+1}$.

Comme $\frac{1}{2} < \ln 2$, on a $0 < \ln 2 - \frac{1}{2}$ et comme $f(\alpha) = \alpha$, on a :

$\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 1$ ainsi $\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha+1} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{e-1} + 1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.

Donc : $\underline{\forall x \in [\alpha, 1],\ 0 < f'(x) \leqslant \frac{1}{2}}$.

b) La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ par 4), ainsi, si $x \in [\alpha, 1]$

on a : $f(\alpha) \leqslant f(x)$ ie $\alpha \leqslant f(x)$ et donc $\underline{0 \leqslant f(x) - \alpha}$.

Montrons que : $\forall x \in [\alpha, 1],\ f(x) - \alpha \leqslant \frac{1}{2}(x - \alpha)$.

Posons $g : x \longmapsto \frac{1}{2}(x - \alpha) - (f(x) - \alpha)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in [\alpha, 1],\ g'(x) = \frac{1}{2} - f'(x) \geqslant 0$ par 9) a), donc

$g$ est croissante sur $[\alpha, 1]$ et on déduit que : $\forall x \in [\alpha, 1],\ g(\alpha) \leqslant g(x)$.

Comme $g(\alpha) = 0$ on en déduit que : $\forall x \in [\alpha, 1],\ 0 \leqslant g(x)$

l'inégalité souhaitée.

c) On sait par 6) que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in ]\alpha, 1]$.

Ainsi par 9) b) : $\forall k \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant f(u_k) - \alpha \leqslant \frac{1}{2}(u_k - \alpha)$

ie $\quad 0 \leqslant \dfrac{u_{k+1} - \alpha}{u_k - \alpha} \leqslant \dfrac{1}{2} \quad [u_k \neq \alpha]$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^{*1}$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{u_{k+1} - \alpha}{u_k - \alpha} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

En multipliant membre à membre ces inégalités à termes positifs, on obtient :

$$0 \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1} - \alpha}{u_k - \alpha} \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2},$$

On reconnaît un produit télescopique pour obtenir :

$$0 \leqslant \frac{u_n - \alpha}{u_0 - \alpha} \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{ie} \quad \underline{0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1-\alpha}{2^n}}. \ [\alpha < 1]$$

Par 1), on sait que $0 < \alpha < 1$, ainsi $0 \leqslant \underbrace{u_0 - \alpha}_{= 1-\alpha} \leqslant \dfrac{1-\alpha}{2^0}$ est vrai.

L'inégalité est également vraie dans le cas $n = 0$.

e) Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1-\alpha}{2^n}$ et que $\dfrac{1-\alpha}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Le théorème d'encadrement nous assure que $u_n - \alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ou encore

que $\underline{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha}$.