DS n°4 de Mathématiques
Lundi 13 Mars 2023, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : Matrices inversibles, calculs des puissances d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. **a)** Calculer $A^2 - 4A$.

b) Déduire de la question précédente que A est inversible et déterminer A^{-1} (on précisera les 9 coefficients de A^{-1}).

2. On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer sont inverse P^{-1}.

b) Déterminer deux réels a et b tels que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Dans la suite, on note $T = P^{-1}AP$ la matrice précédente et on écrit $T = 2I_3 + N$.

a) Préciser la matrice N puis déterminer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.

b) Rappeler la formule du binôme de Newton pour des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en précisant les hypothèses associées.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n (on précisera les 9 coefficients de A^n).

f) La formule précédente est-elle vérifiée pour $n = -1$?

4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers termes : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c) Que vaut X_0 ? En déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, X_n puis u_n, v_n et w_n.

Exercice n°2 : Quelques dénombrements

Le code secret d'un coffre est composé de six chiffres. Seuls les chiffres de 1 à 9 sont possibles.
Les répétitions sont autorisées et le coffre tient compte de l'ordre.

Vous justifierez succinctement chacun de vos résultats.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien de codes commencent par 2 ?

3. Combien y a-t-il de codes dont les six chiffres sont différents ?

4. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre pair ?

5. Combien y a-t-il de codes contenant exactement deux fois le chiffre 4, deux fois le chiffre 5 et deux fois le chiffre 6 ?

Exercice n°3 : (Etude de deux ensembles de matrices)

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I : Questions préliminaires

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $A \in F \cap G$.

2. Justifier que A n'est pas inversible.

Partie II : Propriétés des matrices de F et G

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. **a)** Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

4. On note $B = I_3 - A$, $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$.

a) Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.

b) Calculer AB et BA.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

5. **a)** Montrer que si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ alors M n'est pas inversible.

b) Montrer que si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors M est inversible.

On déduit des deux questions précédentes que M inversible $\iff$ $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

c) Soient α et β deux réels non nuls. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n est inversible et que son inverse, noté M^{-n}, vérifie :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.$$

Exercice n°4 : Une utilisation des coefficients binomiaux pour un dénombrement

Partie I : Quelques formules sur les coefficients binomiaux

Soient $p, k, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq p$, on a : $\displaystyle\binom{k-1}{p-1} = \binom{k}{p} - \binom{k-1}{p}$.

2. En déduire que, pour tout $n \geq p+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$.

Partie II : Application à problème de dénombrement

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **décomposition** de n toute liste **ordonnée** d'entiers supérieurs ou égaux à 1 dont la somme vaut n. On appelle **longueur de la décomposition** la longueur de la liste. Par exemple $(1, 2, 1)$ est une décomposition de longueur 3 de 4 car $1 + 2 + 1 = 4$. De manière générale une décomposition de longueur p (p étant un entier quelconque entre 1 et n) de n s'écrit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et vérifie donc : $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$.

Autres exemples :

- (4) est une décomposition de longueur 1 de $n = 4$;
- $(1, 3)$ et $(3, 1)$ sont des décompositions de longueur 2 de $n = 4$;
- $(0, 4)$ n'est pas une décomposition de $n = 4$ car elle contient 0 ;
- $(1, 1, 1, 1)$ est une décomposition de longueur 4 de $n = 4$.

Dans la suite, on note $N(n, p)$ le nombre de décompositions de n de longueur p et $D(n)$ le nombre total de toutes les décompositions de n possibles.

3. Enumérer toutes les décompositions de 1, de 2 et de 3. En déduire $D(1)$, $D(2)$ et $D(3)$.

4. Déterminer la valeur de $N(n, 1)$ et $N(n, 2)$ en fonction de n.

5. Soient p et n deux entiers tels que $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n - 1$.
Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ une décomposition de n de longueur $p + 1$, on a donc
$x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} = n$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de x_{p+1} ?

b) En remarquant que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n - x_{p+1}$ et en discutant suivant les valeurs possibles de x_{p+1}, montrer que :

$$N(n, p+1) = N(n-1, p) + N(n-2, p) + \ldots + N(p, p) = \sum_{k=p}^{n-1} N(k, p).$$

c) Déduire des questions **I.2)** et **II.5)b)** que, pour tout $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a :

$$\forall n \geq p, \quad N(n, p) = \binom{n-1}{p-1}.$$

On raisonnera par récurrence sur p.

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $D(n) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} N(n, p)$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a $D(n) = 2^{n-1}$.

Exercice n°5 : Etude asymptotique d'une suite définie par une somme binomiale

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

1. Représenter les 5 premières lignes du triangle de Pascal puis calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\displaystyle\binom{n}{2}$ sans factorielle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Montrer que, pour tout $k \in \left[\!\left[0; \frac{n-1}{2}\right]\!\right]$, on a $\displaystyle\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$.

Autrement dit, chaque ligne du triangle de Pascal est constitué de termes croissants jusqu'à son milieu.

4. Rappeler la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.
En déduire que, pour tout $k \in \left[\!\left[\frac{n-1}{2}; n-1\right]\!\right]$, on a $\displaystyle\binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$. Déduire des questions précédentes que, pour tout $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$, $\displaystyle 2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

7. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆