Devoir surveillé n°4, lundi 18 janvier 2021

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Etude d'une suite récurrente

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^3}{2}$.

1. Déterminer les variations et point(s) fixe(s) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x + x^3}{2}$, définie sur $\boxed{\mathbb{R}_+}$.
2. En déduire que (u_n) est bien définie et minorée.
3. Prouver par récurrence que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Quel est la limite de (u_n) ? Justifier **soigneusement**.

Exercice n°2 Quelques changements de variable

L'objectif de cet exercice est de calculer les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que les intégrales I et J sont bien définies.
2. **Intégrale I : Avec des changements de variables affines.**
   (a) Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ et en déduire que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Effectuer le second changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$. En déduire la valeur de I.
3. **Intégrale J : Avec le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.**
   (a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\pi; \pi\right[$, $\quad \sin(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   (b) A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **que l'on justifiera**, calculer J.

Exercice n°3 Résolution d'un système à paramètre

Soit a un réel. On considère le système suivant, d'inconnues x, y et z :

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \end{array} \right.$$

1. Donner **la forme échelonnée** de $(\mathscr{S})$.
2. Montrer que $(\mathscr{S})$ est de Cramer si et seulement si $a \notin \{1; 2\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions dans le cas où $a = 1$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions dans le cas où $a = 2$.
5. Déterminer l'ensemble des solutions dans le cas où $a \neq 1$ et $a \neq 2$.

Exercice n°4 Etude d'une suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. En déduire I_0.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}.$$

Indication : on pourra poser $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *et* $g(x) = x^{n-1}$.

4. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$, puis à l'aide d'une propriété de l'intégrale que vous préciserez, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
6. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n \leqslant I_{n-2}$.
Puis, à l'aide de la question 3., montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sqrt{2} - 3I_n \leqslant 2nI_n \leqslant \sqrt{2} + I_n.$$

7. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{2}I_n = 1$.

Exercice n°5 Série harmonique et série harmonique alternée

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.
Seule la question I) 3.(c) est utile dans la partie II).

I) La série harmonique : Dans cette partie, on étudie la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Etudier la monotonie de (u_n). En déduire que (u_n) possède une limite.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer la limite de (u_n).
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x$
   (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\ln(n+1) \leqslant u_n$. En déduire la limite de (u_n).
3. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad a_n = u_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad b_n = a_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$.
   (b) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   (c) En déduire l'existence d'un réel γ et d'une suite (e_n) qui tend vers zéro telle que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \ln(n) + \gamma + e_n.$$

   Le réel γ s'appelle la constante d'Euler.

II) La série harmonique alternée : Dans cette partie, on étudie la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Montrer que les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Justifier que (v_n) converge. On note ℓ la limite de (v_n).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   Indication : On pourra commencer par justifier que, pour tout $(n, m) \in \left(\mathbb{N}^{\geqslant 1}\right)^2,\ v_{2n} \leqslant \ell \leqslant v_{2m+1}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $v_{2n} = u_{2n} - u_n$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n} = \ln(2)$.
6. Montrer que $\ell = \ln(2)$. Donner une valeur de n pour laquelle v_n est une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$ à 10^{-10} près.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆