DS n°4 de Mathématiques

Lundi 7 Mars 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : Calculs de limites

Calculer les limites suivantes en justifiant soigneusement :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)-x^3}{e^x+x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+4x^2-2x-4}{x^2-2x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^3+1)-2\ln(x+1)$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x^2-2}-e^2}{x-2}$

Exercice n°2 : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie par

$$f:\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

où $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de définition de f. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
   On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$, limites comprises.
3. Donner, sans justification, l'ensemble image de f.
4. A l'aide des questions précédentes, justifier soigneusement que f est bijective.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$. En résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathscr{D}_f$, retrouver le fait que f est bijective et déterminer l'expression de son application réciproque f^{-1}.
6. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles à $\mathscr{C}_f$ ainsi que l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Réaliser un graphique sur lequel vous représenterez : les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}_f$, T_0 et enfin $\mathscr{C}_f$.

Exercice n°3 : Système linéaire à paramètre

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{0; 1; 2\}$.

2. Pour chacune des valeurs λ de l'ensemble $\{0; 1; 2\}$, résoudre l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice n°4 : Calcul des puissances d'une matrice

On considère les matrices carrées A et B définies par

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 3I_3.$$

1. **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^k pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Donner l'expression sans factorielles des coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.

3. Exprimer A en fonction de B et I_3 puis, à l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

4. Justifier que l'expression trouvée à la question précédente est valide dans les cas $n = 0$ et $n = 1$. Donner les 9 coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°5 : Etude d'un ensemble de matrices

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices carrées d'ordre 2 qui vérifient la propriété suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ appartient à } \mathscr{E} \quad \text{si et seulement si} \quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = a_1 + b_1 = a_2 + b_2.$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces quatre sommes.

On note $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, la matrice identité d'ordre deux et J la matrice définie par $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $I \in \mathscr{E}$ puis que $J \in \mathscr{E}$. Vous préciserez les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2. Dans cette question on considère l'ensemble de matrices suivant : $\mathscr{F} = \left\{ M_z = \begin{bmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$. Pour $z \in \mathbb{R}$, précisez la valeur de $s(M_z)$.

b) A-t-on $\mathscr{F} = \mathscr{E}$? Justifier.

3. Soit $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

a) Calculer AJ et JA.

b) Démontrer que $A \in \mathscr{E}$ si et seulement si $AJ = JA$.

c) Vérifier que si $A \in \mathscr{E}$ alors $AJ = s(A)J$.

4. Soient $A, B \in \mathscr{E}$. On pourra utiliser les résultats de la question **3.**.

a) Montrer que $A \times B \in \mathscr{E}$.

b) Etablir l'égalité $s(A \times B) = s(A) \times s(B)$.

5. Soient $A \in \mathscr{E}$ une matrice inversible. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
On pourra utiliser les résultats de la question **4.**.

a) Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$ et exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

Exercice n°6 : Probabilités et suites n°1

On dispose de trois urnes contenant chacune 5 boules : l'urne rouge contient 3 boules rouges, 1 verte et 1 jaune ; l'urne Verte contient 2 boules vertes, 2 rouges et 1 jaune ; l'urne Jaune contient 2 boules jaunes, 2 vertes et 1 rouge.
On choisit une urne au hasard puis on effectue des tirages successifs avec remise (dans la même urne) avec la règle suivante : si la boule obtenue est rouge, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Rouge, si la boule obtenue est verte, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Verte et si la boule obtenue est jaune, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Jaune.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note :

- R_n : « le tirage numéro n amène une boule rouge » ;
- V_n : « le tirage numéro n amène une boule verte » ;
- J_n : « le tirage numéro n amène une boule jaune ».

Les événements R_0, V_0 et J_0 désignent l'urne utilisée pour le premier tirage.

1. Calculer $P(R_1)$ puis $P(V_1)$. Que vaut $P(J_1)$?

2. On suppose que la boule obtenue au premier tirage est de couleur jaune.
Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne Verte ?

3. Calculer la probabilité que les trois premières boules tirées soient de couleur verte.

4. L'objectif de cette question est de déterminer l'expression de $P(R_n)$ en fonction de n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note $r_n = P(R_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $j_n = P(J_n)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Que vaut $r_n + v_n + j_n$? Justifier.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Démontrer les relations suivantes :

$$r_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}$$

puis en déduire l'expression de r_{n+2} en fonction de r_{n+1} et de r_n.

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n = r_n - \dfrac{7}{16}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ est linéaire récurrente d'ordre 2.

d) En déduire l'expression de u_n puis celle de r_n en fonction de n.

Exercice n°7 : Probabilités et suites n°2

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On précisera les 4 coefficients de A^n.

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font suivant le protocole suivant :

- Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, sinon elle va dans la pièce A ou dans la pièce C avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement A_n :« la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

6. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix}$.

8. **a)** Justifier que $U_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $U_n = A^n U_0$.

c) Déduire de la question **5.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et c_n.

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆