DS n°4 de Mathématiques
Lundi 19 Février 2024, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le barre d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : (Coefficients binomiaux et formule de Pascal)

1. Construire un triangle de Pascal permettant de déduire les valeurs de $\binom{9}{5}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{4}$ et $\binom{7}{5}$.

2. En déduire la relation $\binom{9}{5} = \binom{7}{3} + 2\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$.

3. On peut généraliser le résultat précédent en écrivant que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \qquad (\star)$$

a) Rappeler la formule de Pascal.

b) En déduire la relation $(\star)$.

Indication : on appliquera trois fois la formule de Pascal.

Exercice n°2 : (Calculs de sommes doubles et binomiales)

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad k(k+1)\binom{n+1}{k+1} = n(n+1)\binom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. *On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Déterminer la valeur **sous forme factorisée** des sommes doubles suivantes :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Exercice n°3 : Inversibilité et calculs de puissances de matrices

A tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

1. A quelles conditions portant sur a, b et c la matrice $M(a,b,c)$ est-elle inversible ?
Dans ce cas, déterminer l'inverse de $M(a,b,c)$ en fonction de a, b et c.

2. Dans cette question, on considère le cas particulier de la matrice $M(1,2,3)$ (ie $a=1$, $b=2$ et $c=3$). On considère également les matrices

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer une matrice diagonale D telle que $PD = M(1,2,3)P$.

b) Justifier que P est inversible et que Q est l'inverse de P. Dorénavant, on notera $Q = P^{-1}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[M(1,2,3)]^n = PD^nP^{-1}$.

d) En déduire la matrice $[M(1,2,3)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Dans cette question, on considère le cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$ (ie $a=1$, $b=1$ et $c=1$). On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Déterminer, J, J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$.

b) A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer $[M(1,1,1)]^n$ pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ en fonction de I_3 et J.

c) Justifier que la relation établie à la question précédente est valide pour $n=0$ et $n=1$.

d) En déduire les neuf coefficients de la matrice $[M(1,1,1)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°4 : Etude d'ensembles de matrices

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On considère alors les trois ensembles de matrices suivants :

$$E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MB\}, \qquad F = \left\{ \begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{et} \qquad G = \left\{ \begin{bmatrix} b-1 & 1 & b \\ 1 & 2-b & 1-b \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie I : Etude de relations entre les ensembles E, F et G

1. Justifier que $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in E$.

2. Montrer que $F \subset E$, puis que $E \not\subset F$.

3. Montrer que F et G sont disjoints.

4. Montrer que $E \cap G$ est restreint à une unique matrice que vous préciserez.

Partie II : Explicitation des éléments de E

L'objectif de cette partie est de déterminer une forme explicite des matrices de E.

5. **a)** Calculer P^2 et P^3. En déduire la valeur de $-P^3+P^2+3P$.

b) Déduire de la question précédente que P est inversible et déterminer P^{-1}.

On admet que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ où D_1 et D_2 sont les matrices suivantes :

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$.

a) Montrer que : $M \in E \iff D_1N = ND_2$.

b) En écrivant $N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ avec $a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R}$, déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $D_1N = ND_2$.

c) En déduire une forme explicite des matrices composant l'ensemble E.

Exercice n°5 : Etude de la somme des inverses des coefficients binomiaux

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 3}}$, définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 3}}$ converge et de déterminer sa limite.

1. **Python** Pour chaque question, on peut faire appel aux fonctions écrites dans les questions précédentes (même si celles-ci n'ont pas été complétées).

a) Compléter la fonction `fact` suivante qui prend en argument un entier positif n et qui renvoie la valeur de $n!$.

```
def fact(n):
    P=.....
    for i in range(.....):
        P=.....
    return P
```

b) Compléter la fonction `coeffbin` suivante qui prend en argument deux entiers positifs n et k, et qui renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$.

```
def coeffbin(n,k):
    if n<k:
        return .....
    else:
        return .....
```

c) Compléter la fonction `suite` suivante qui prend en argument un entier n supérieur à 3, et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    S=.....
    for k in range(.....):
        S=.....
    return S
```

2. Calculer u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ fixé.

a) Rappeler la valeur, sans factorielles, des coefficients binomiaux suivants

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n+1}{1}, \quad \binom{n+1}{2}, \quad \binom{n+1}{3}.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

c) Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{\binom{n}{k}} \geq \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

4. Déduire de la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 3}}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.

5. Dans cette question, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ fixé.

a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}.$$

b) En déduire que $\displaystyle (n+2)(u_n - 1) - (2n+2)\left((u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\right) = -n$,

puis que $\displaystyle u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2n+2} u_n$.

6. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. A l'aide du résultat de la question précédente, prouver que $\ell = 2$.

7. Python Compléter la fonction `seuil` suivante qui prend en argument un flottant $\varepsilon > 0$ et qui renvoie la liste L des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 3}}$ strictement supérieurs à $2 + \varepsilon$. On pourra utiliser les fonctions de la question **1.**

```
def seuil(eps):
    L=..... #On initialise la liste L
    n=.....
    while .....
        ..... #On ajoute le n-ieme terme de la suite à la liste L
        n=.....
    return L
```

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆