

# DS N°4 DE MATHÉMATIQUES

## Lundi 3 Mars 2025, de 8h à 12h

*Calculatrice non autorisée*

**Éléments de présentation de la copie :** Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faites au brouillon.
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on barre le contenu proprement. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

### Exercice

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . Donner la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$$

2. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j \quad \text{et} \quad S_5 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} j$$

Tournez la page -- >

**Problème n°1 : (ECRICOME ECT 2024 Exercice n°1)**

On considère trois suites  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par la donnée de  $r_0 = 2$ ,  $s_0 = 10$  et  $t_0 = 1$

$$\text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} r_{n+1} &= -\frac{1}{4}s_n + 2t_n \\ s_{n+1} &= r_n + s_n - t_n \\ t_{n+1} &= \frac{1}{2}t_n + 1 \end{cases}$$

On introduit les matrices

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose également  $X_n = \begin{bmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{bmatrix}$ .

1. On pose  $M = A - I$ .
  - a) Expliciter la matrice  $M$ .
  - b) Calculer  $(2M + I)^3$ .
  - c) En déduire que  $M(8M^2 + 12M + 6I) = -I$ .
  - d) En déduire que  $M$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $M$  et de  $I$ .
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = AX_n + B$ .
3. Dans Python, on importe la bibliothèque `numpy` à l'aide de la commande `import numpy as np`
  - a) Ecrire un script Python permettant de définir la matrice  $A$ . Faire de même pour  $B$ .
  - b) Rappeler la commande permettant de réaliser un produit matricielle.
  - c) A l'aide de la question 2., écrire une fonction Python `suite1X(n)` prenant en argument un entier naturel  $n$  et renvoyant la matrice  $X_n$ .
4.
  - a) Vérifier que  $AC + B = C$ .
  - b) Montrer que  $I - A$  est inversible.
  - c) En déduire que  $C$  est l'unique matrice colonne telle que  $X = AX + B$ .
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n - C = A^n(X_0 - C)$ .
6. Dans Python, on importe la bibliothèque `numpy.linalg` à l'aide de la commande `import numpy.linalg as al`
  - a) Rappeler la commande permettant de calculer la puissance  $n$ -ième d'une matrice.
  - b) A l'aide de la question 5., écrire une fonction `suite2X(n)` qui prend en argument un entier naturel  $n$  et qui renvoie la matrice  $X_n$ .

On définit les matrices

$$P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On admet que  $A = \frac{1}{4}PTQ$ .

7.
  - a) Calculer  $QP$ .
  - b) En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse à l'aide de la matrice  $Q$ .
  - c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$ .
  - d) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$T^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On admet alors que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{bmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. En déduire l'expression explicite de chacune des suites  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
9. Déterminer les limites des trois suites  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Problème n°2 : (Etude de deux sommes binomiales)****Partie I : Formule d'itération de Pascal**

1. Rappeler la formule de Pascal.

2. Soient  $p, n \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq n$ .

a) Dédurre de la question précédente une écriture, sous la forme d'un coefficient binomial, de l'expression

$$\binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1}.$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq p}$ , on a

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \quad (\star)$$

**3. Application**

a) Rappeler les valeurs sous forme fractionnaire et sans factorielle des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{n}{1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \binom{n}{2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^{\geq 2} \quad \text{et} \quad \binom{n}{3} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$$

b) En appliquant la relation  $(\star)$  dans le cas  $p = 1$ , retrouver la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n k$ .

c) De même, en appliquant la relation  $(\star)$  dans le cas  $p = 2$ , retrouver la relation

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Partie II : Somme des inverses des termes d'une colonne du triangle de Pascal**

4. a) Réaliser un triangle de Pascal permettant de calculer les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$  pour  $0 \leq n, k \leq 6$ .

b) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=3}^6 \frac{1}{\binom{k}{3}}$ .

5. L'objectif est d'établir, pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $2 \leq p \leq n$ , la relation suivante

$$\sum_{k=p}^n \frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p}{p-1} \left( 1 - \frac{1}{\binom{n}{p-1}} \right) \quad (\star\star)$$

a) En appliquant cette relation, retrouver votre résultat de la question **6.b)**.

b) Etablir la relation  $(p-1) \binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1} = p \binom{k-1}{p-2} \binom{k}{p}$ .

c) En déduire que

$$\frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p}{p-1} \frac{\binom{k-1}{p-2}}{\binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1}},$$

puis que

$$\frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p}{p-1} \left( \frac{1}{\binom{k-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{k}{p-1}} \right).$$

d) En déduire la formule  $(\star\star)$ .

6. Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq n$ ,  $\frac{(n-p)^p}{p!} \leq \binom{n}{p}$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{p}$  existe et donner sa valeur.

c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^n \frac{1}{\binom{k}{p}}$  existe et donner sa valeur.

Tournez la page -- >

**Problème n°3 : (Banque PT 2023, Exercice n°1)**

On considère les parties de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivantes :

$$\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^3 = 0_3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On considère également l'ensemble  $\mathcal{U}$  des matrices dites *unipotentes* de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui s'écrivent  $U = I + N$ , où  $N \in \mathcal{E}$  et  $I$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Autrement dit  $U \in \mathcal{U}$  s'il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tel que  $U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Enfin, on définit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Etude de  $\mathcal{N}$ .
  - a) Vérifier que les matrices  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{N}$ .
  - b) En déduire que la somme et le produit de deux matrices de  $\mathcal{N}$  n'appartiennent pas nécessairement à  $\mathcal{N}$ .
  - c) Montrer que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$ .
2. Etude de  $\mathcal{E}$ .
  - a) Soient  $N, M \in \mathcal{E}$ . Montrer que  $\mathcal{E}$  est stable par somme, c'est-à-dire que  $N + M \in \mathcal{E}$ .
  - b) Soient  $N, M \in \mathcal{E}$ . Montrer que  $\mathcal{E}$  est stable par produit, c'est-à-dire que  $NM \in \mathcal{E}$ .
3. Etude de  $\mathcal{U}$ .
  - a) Montrer que  $\mathcal{U}$  est stable par produit.
  - b) Justifier que les matrices de  $\mathcal{U}$  sont inversibles.
4. Soient  $U \in \mathcal{U}$  et  $N \in \mathcal{E}$  telles que  $U = I + N$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $U_{(\alpha)}$  par

$$U_{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2.$$

- a) Calculer  $C_{(\alpha)}$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  où  $C$  est la matrice définie en préambule.
- b) Vérifier que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $U_{(\alpha)} \in \mathcal{E}$ .
- c) Montrer que, pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$U_{(\alpha)} U_{(\beta)} = U_{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad (U_{(\alpha)})_{(\beta)} = U_{(\alpha\beta)}.$$

- d) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ,  $U_{(n)} = U^n$ .
  - e) Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver  $U_{(n)} = U^n$ .  
Qu'en est-il pour  $n = 0$  et  $n = 1$  ?
  - f) Montrer que  $U_{(-1)} = U^{-1}$ .
5. En utilisant les résultats de la question 4., expliciter une matrice  $W \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $W^2 = C$ .

\*\*\* Fin du sujet \*\*\*