

Exercice :

$$1) S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = \underline{e^n}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = \underline{0} \text{ (car } n \geq 1)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{e^k} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{e}\right)^k 1^{n-k} \right) - \frac{\binom{n}{0}}{e^0} - \frac{\binom{n}{n}}{e^n} = \left(\frac{1}{e} + 1\right)^n - \frac{1}{e^n} - 1$$

$$= \underline{\left(\frac{3}{e}\right)^n - \frac{1}{e^n} - 1}$$

$$2) S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n j = n \sum_{j=1}^n j = \underline{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$

$$S_5 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^n j(j-1) = 2! \sum_{j=2}^n \binom{j}{2} = 2! \sum_{j=2}^n \left[\binom{j+1}{3} - \binom{j}{3} \right] \begin{matrix} \text{[Formule} \\ \text{de Pascal]} \end{matrix}$$

$$= 2! \left(\binom{n+1}{3} - \underbrace{\binom{2}{3}}_{=0} \right) \begin{matrix} \text{[par} \\ \text{télécopie]} \end{matrix}$$

$$= \underline{\frac{(n+1)n(n-1)}{3}}$$

Problème n°1

$$1) a) M = \begin{bmatrix} -1 & -1/4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$b) 2M + I = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (2M + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{(2M + I)^3 = O_3}$$

c) Comme $2M$ et I commutent ($2MI = I2M$), on a par la formule du Binôme :

$$(2M + I)^3 = (2M)^3 + 3(2M)^2 I + 3(2M) I^2 + I^3 = 8M^3 + 12M^2 + 6M + I.$$

$$\text{Par suite } 8M^3 + 12M^2 + 6M + I = O_3 \text{, i.e. } \underline{M(8M^2 + 12M + 6I) = -I}$$

d) On a : $M(-8M^2 - 12M - 6I) = I$, donc M est inversible et

$$\underline{M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I}.$$

$$2) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a : } AX_n + B = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 s_n + 2t_n \\ r_n + s_n - t_n \\ 1/2 t_n + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$3) a) A = \text{np.array}([[-1/4, 2], [1, 1, -1], [0, 0, 1/2]])$$

$$B = \text{np.array}([0], [0], [1])) = \underline{X_{n+1}}$$

(2)

b) `np.dot(..., ...)` permet de réaliser le produit matriciel.

c) de f suite 1X(n):

$$X = \text{np.array}([[2], [10], [1]])$$

for k in range(n):

$$X = \text{np.dot}(A, X) + B$$

return X

4) a) $AC = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 8 \cdot (-1/4) + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc $AC + B = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = C$.

b) $I - A = -(A - I) = -M$. Or M est inversible par 1) d) (d'inverse $-8M^2 - 12M - 6I$), donc $-M$ est inversible (d'inverse $8M^2 + 12M + 6I$).

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a: $X = AX + B \iff (I - A)X = -B$.

La matrice $I - A$ étant inversible, le système linéaire $(I - A)X = -B$ possède une unique solution. Par suite, $X = AX + B$ possède une unique solution. Comme C est solution de cette dernière équation par 4) a), c'est la seule possible.

5) $\square A^0(X_0 - C) = I_3(X_0 - C) = X_0 - C$. La propriété est vraie au rang 0.

$\square$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$.

On a: $X_{n+1} = AX_n + B$ [par 2)] et $C = AC + B$ [par 4a)]

ainsi: $X_{n+1} - C = (AX_n + B) - (AC + B) = A(X_n - C)$

La propriété est héréditaire.

$$\begin{aligned} &= A(A^n(X_0 - C)) \quad [\text{par hypothèse de récurrence}] \\ &= A^{n+1}(X_0 - C) \end{aligned}$$

6) a) `al.matrix_power(..., n)` permet de calculer la n -ième puissance d'une matrice

b) de f suite 2X(n):

$$A_n = \text{al.matrix_power}(A, n)$$

$$X = \text{np.array}([[2], [10], [1]])$$

$$C = \text{np.array}([[2], [8], [2]])$$

$$\text{return np.dot}(A_n, X - C) + C$$

(3)

7) a) $\underline{QP = 2I_3}$

b) On a: $(\frac{1}{2}Q)P = I_3$. Donc $\underline{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2}Q}$.

c) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\square \frac{1}{2^{0+1}} P T^0 Q = \frac{1}{2} P I_3 Q = P \left(\frac{1}{2} Q \right) = I_3 \quad \left[\text{car } P \text{ et } \frac{1}{2} Q \text{ inverses} \right]$$

$$= A^0$$

$$\square \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ Supposons } A^n = \frac{1}{2^{n+1}} P T^n Q.$$

$$\text{On a: } \underline{A^{n+1} = A A^n} = \left(\frac{1}{4} P T Q \right) \left(\frac{1}{2^{n+1}} P T^n Q \right)$$

$$\begin{aligned} \text{La propriété est héréditaire} \quad &= \frac{1}{2^{n+2}} P T \left(\frac{1}{2} Q \right) P T^n Q \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} P T^{n+1} Q \end{aligned}$$

d) On a: $T = I_3 + N$ avec $N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. De plus:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } : \forall k \geq 3, N^k = 0_3. \text{ Enfin, } I_3 \text{ et } N \text{ commutent,}$$

donc par la formule du Binôme:

$$\text{pour } n \geq 2, \quad \underline{T^n = (I_3 + N)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k$$

$$\text{La relation trouvée est toujours,} \quad = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \quad \left[\text{car } N^k = 0_3 \text{ pour } k \geq 3 \right]$$

valable pour $n=1$ et $n=0$.

$$= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2$$

$$= I_3 + n N + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8) Par 5), on a:

$$X_n = A^n (X_0 - C) + C = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ On en déduit que:}$$

$$\underline{r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}} (3n^2 - 13n), \quad s_n = 8 + \frac{1}{2^n} (-3n^2 + 7n + 2), \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}}$$

g) Par croissance comparée $\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par suite:

(4)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 2$$

Problème n°2

Partie I

1) Pour $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on a: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2) a) $\binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} = \binom{(n+1)+1}{p+1} = \binom{n+2}{p+1}$

b) $\square \quad \sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$, la propriété est vraie au rang p .

$\square$ Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq p}$. Supposons que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Or a: $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$ [par hypothèse de récurrence]

La propriété est héréditaire $= \binom{n+2}{p+1}$ [par 2) a)]

3) a) $\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

b) Or a: $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{1+1}$ i.e. $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

c) Or a: $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{2+1}$ i.e. $\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$,

ou encore $\sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$. On en déduit que:

$$\sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}, \text{ puis que: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2(n-1)+3)}{6} \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie II

4) a)

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

b)

$$\sum_{k=3}^6 \frac{1}{\binom{k}{3}} = \frac{1}{\binom{3}{3}} + \frac{1}{\binom{4}{3}} + \frac{1}{\binom{5}{3}} + \frac{1}{\binom{6}{3}}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{7}{5}$$

$$5) a) \sum_{k=3}^6 \frac{1}{\binom{k}{3}} = \frac{3}{3-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{6}{2}} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{15} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{15} = \underline{\underline{\frac{7}{5}}} \quad (5)$$

b) Gra:

$$\begin{aligned} \frac{(p-1) \binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1}}{(p-1) \binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1}} &= (p-1) \frac{(k-1)!}{(p-1)! (k-p)!} \frac{k!}{(p-1)! (k-p+1)!} \\ &= \frac{(k-1)!}{(p-2)! (k-p)!} \frac{k!}{p! (k-p)!} \frac{p}{k-p+1} \\ &= p \frac{(k-1)!}{(p-2)! (k-p+1)!} \frac{k!}{p! (k-p)!} \\ &= p \binom{k-1}{p-2} \binom{k}{p} \end{aligned}$$

c) On en déduit, par inversion, que: $\frac{1}{p \binom{k-1}{p-2} \binom{k}{p-1}} = \frac{1}{p \binom{k-1}{p-2}} \cdot \frac{1}{\binom{k}{p}}$

Puis que: $\frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p \binom{k-1}{p-2} \binom{k}{p-1}}{(p-1) \binom{k-1}{p-2} \binom{k}{p-1}}$

$$= \frac{p}{p-1} \frac{\binom{k-1}{p-2}}{\binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1}}$$

Enfin, comme $\binom{k-1}{p-2} = \binom{k}{p-1} - \binom{k-1}{p-1}$ par la formule de Pascal,

on obtient: $\frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p}{p-1} \frac{\binom{k}{p-1} - \binom{k-1}{p-1}}{\binom{k-1}{p-1} \binom{k}{p-1}} = \frac{p}{p-1} \left(\frac{1}{\binom{k-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{k}{p-1}} \right)$

d) Gra: $\sum_{k=p}^n \frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p}{p-1} \sum_{k=p}^n \left(\frac{1}{\binom{k-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{k}{p-1}} \right) = \frac{p}{p-1} \left(\frac{1}{\binom{p-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{n}{p-1}} \right)$

par télescopage

$$= \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{p-1}} \right)$$

$$6) a) \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{\prod_{h=0}^{p-1} (n-h)}{p!}.$$

⑥

Or, pour tout $h \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $n-h \geq n-p \geq 0$ (car $n \geq p$)

donc, par produit de ces inégalités à membres positifs, on obtient:

$$\prod_{h=0}^{p-1} (n-h) \geq \prod_{h=0}^{p-1} (n-p) = (n-p)^p.$$

On en déduit que: $\binom{n}{p} \geq \frac{(n-p)^p}{p!}$

b) Or a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-p)^p}{p!} = +\infty$. Par le théorème de minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{p} = +\infty$

c) On conclut que:

$$\sum_{h=p}^n \frac{1}{\binom{h}{p}} = \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{p-1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{p-1}$$

Problème 3

1) a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A^3 = O_3$, donc $A \in \mathcal{N}$.

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B^3 = O_3$, donc $B \in \mathcal{N}$.

b) $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $(A+B)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Donc la somme de deux éléments de $\mathcal{N}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{N}$. $\neq O_3$

$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $(A \times B)^3 = \begin{bmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O_3$

Donc le produit de deux éléments de $\mathcal{N}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{N}$.

c) Soit $M \in \mathcal{E}$. Or a $M = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $M^3 = O_3$.

Donc $M \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$.

(7)

$$2) a) N = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{bmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Gra: } N + \Pi = \begin{bmatrix} 0 & x+x' & y+y' \\ 0 & 0 & z+z' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}. \quad \begin{pmatrix} a = x+x' \\ b = y+y' \\ c = z+z' \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ Gra: } N\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xz' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}. \quad \begin{pmatrix} a = 0 \\ b = xz' \\ c = 0 \end{pmatrix}$$

3) a) Soient $U, V \in \mathcal{U}$. Gra: $U = I + N$ et $V = I + \tilde{N}$ avec $N, \tilde{N} \in \mathcal{E}$. On obtient:

$$U \times V = (I + N)(I + \tilde{N}) = I + N + \tilde{N} + N\tilde{N}.$$

Or $N + \tilde{N} \in \mathcal{E}$, $N\tilde{N} \in \mathcal{E}$ par 2) et donc $N + \tilde{N} + N\tilde{N} \in \mathcal{E}$ (toujours par 2)).

Ainsi $U \times V = I + \underbrace{N + \tilde{N} + N\tilde{N}}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ stable par produit.

b) Les matrices de $\mathcal{U}$ sont triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1 (donc différents de 0), elles sont donc inversibles.

$$4) a) C = I + N \text{ où } N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ainsi: } C_{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 2\alpha(1-\alpha) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \text{ Comme } N \in \mathcal{E}, \text{ on a: } N = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\alpha N = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}$. Par 2) b), $N \times N = N^2 \in \mathcal{E}$ et, par suite,

$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{E}$. Par 2) a) $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{E}$. Donc $\underbrace{C_{(\alpha)}}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{U}$.

f) $U_{(-1)} = I - N + N^2$ et on a:

(9)

$$\begin{aligned} U \times U_{(-1)} &= (I + N)(I - N + N^2) \\ &= I - N + N^2 + N - N^2 + \underbrace{N^3}_{=0} \\ &= I \end{aligned}$$

Donc U est inversible et $U^{-1} = U_{(-1)}$.

5) Comme $C \in \mathcal{U}$, on a: $C = C_{(\frac{1}{2}\sqrt{2})} = (C_{(\frac{1}{2})})_{(2)} \quad [\text{par 4)c)]}$

Donc $W = C_{(\frac{1}{2})} = (C_{(\frac{1}{2})})^L \quad [\text{par 4)d)]}$

$$= I + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1/2(1/2-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est solution de l'équation $W^2 = C$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.