Devoir surveillé n°5, lundi 15 février 2021

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Quelques dénombrements

On dispose de trois couleurs (rouge, vert, bleu), avec lesquelles on souhaite colorier les cases suivantes - chaque case étant coloriée d'une couleur :

Déterminer, en justifiant votre réponse :

1. le nombre total de coloriages possibles ;
2. le nombre de coloriages avec des lignes unicolores ;
3. le nombre de coloriages avec au moins une case rouge ;
4. le nombre de coloriages n'utilisant qu'une ou deux couleurs ;
5. le nombre de coloriages avec exactement trois cases rouges ;
6. le nombre de coloriages avec au moins 8 cases rouges.

Exercice n°2 Calculs de limites et une étude de continuité

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $]0,\,+\infty[\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{N}^\star\}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{x^2\ln x}{\sin x}$.
   (a) Déterminer la limite de f en 0, soigner la rédaction.
   (b) Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$, soigner la rédaction.
2. On considère la fonction g définie sur $]-\pi,\,\pi[$ par

$$g : \begin{array}{ccl}]-\pi,\,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   Etudier la continuité de g sur $]-\pi,\,\pi[$.

Problème n°1 : Algèbre

Partie A : Trois méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

On note $M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M^2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I_3 et M, i.e. qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que : $M^2 = \lambda I_3 + \mu M$.
2. Rappeler la définition de la notion de matrice inversible.
3. Déduire des deux questions précédentes que M est une matrice inversible et déterminer M^{-1} (sans utiliser d'échelonnement). On explicitera ses 9 coefficients.

Calcul de M^n à l'aide de suites

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que :

$$M^n = a_n I_3 + b_n M$$

   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
5. Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1.
6. Montrer que la suite (b_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$.
7. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n puis a_n en fonction de n.
8. En déduire l'expression de M^n. On explicitera ses 9 coefficients.

Calcul de M^n par introduction d'une matrice auxiliaire

9. On pose : $J = M - 2I_3$. Calculer J^2, J^3 puis J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
10. En déduire l'expression de M^n. On vérifiera les résultats obtenus à la question précédente.

    Indication : commencer par remarquer que $M = 2I_3 + J$.

Calcul de M^n par diagonalisation

11. On pose : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
    Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
12. Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale D que l'on déterminera telle que : $MP = PD$.
13. Indiquer une autre manière de calculer M^n. On ne demande pas ici d'expliciter les coefficients de M^n, sauf si ceux-ci n'ont pas été explicitées aux questions précédentes.

    Indication : commencer par remarquer que $M = PDP^{-1}$.

Partie B : Application à un système de suites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 2^n \\ v_{n+1} = u_n - 2^n \end{cases}$$

14. Soit (w_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
    Donner l'expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
15. On note $C_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$. Exprimer C_{n+1} en fonction de M et C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
16. En déduire C_n en fonction de C_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    Préciser alors les expressions de u_n et v_n.

Problème n°2 : Analyse

Partie A : Expression d'une fonction réciproque.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note argth (argument tangente hyperbolique) sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Justifier que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
4. Traduire en termes d'équations la bijectivité de th.
   Soit $y \in I$, exprimer $\mathrm{argth}(y)$ à l'aide de fonctions usuelles.
   Indication : on résoudra une équation.

Partie B : Etude d'une équation fonctionnelle.

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

5. Déterminer les fonctions constantes vérifiant $(\star)$.
6. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f vérifie $(\star)$.
7. Montrer que, si f vérifie $(\star)$, alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; -1 \leqslant f(x) \leqslant 1.$
   Indication : on pourra commencer par étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$.
8. Montrer que si f vérifie $(\star)$ alors $-f$ vérifie également $(\star)$.
9. Montrer que th vérifie $(\star)$.

Partie C : Résolution de $(\star)$ lorsque f continue en 0. Etude des cas $f(0) = 1$ puis $f(0) = -1$.

Dans cette partie, on note f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, <u>continue en 0</u> et vérifiant $(\star)$.

On suppose de plus que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

10. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Pour les trois questions qui suivent, on aura bien en tête les résultats des questions 7. et 8.

11. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier ses variations en fonction du signe de u_0.
12. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.
13. Que peut-on dire que l'on remplace l'hypothèse $f(0) = 1$ par $f(0) = -1$?
14. Que peut-on conclure de l'étude menée dans cette partie ?

Partie D : Résolution de $(\star)$ lorsque f dérivable en 0. Etude du cas $f(0) = 0$.

Dans cette partie, on note f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, <u>dérivable en 0</u> et vérifiant $(\star)$.

On suppose de plus que $f(0) = 0$.

15. En raisonnant par l'absurde et en considérant la même suite que celle de la partie C (en précisant au préalable qui est x_0), montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

On définit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = \mathrm{argth}(f(x))$.

16. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; g(2x) = 2g(x)$.
17. Montrer que g est dérivable en 0.
18. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. On définit la suite (v_n) par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

19. Montrer que la la suite (v_n) est constante.
20. En déduire que g est une fonction linéaire (i.e. du type $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$).

Partie E :

21. Conclure quant aux fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifiant la relation $(\bigstar)$.

$\star \star \star$ **Fin du sujet** $\star \star \star$