DS n°5 de Mathématiques
Lundi 2 Mai 2022, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.

- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le marque d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : (Continuité, dérivation et convexité)

On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = \sqrt{x}\ln(x).$$

On admet que : $0,36 \leq e^{-1} \leq 0,37$ *et* $0,13 \leq e^{-2} \leq 0,14$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Vous préciserez la fonction prolongé associée. *Dans la suite de cet exercice, on notera f la fonction prolongée, définie sur $\mathbb{R}_+$.*
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Est-elle dérivable en 0 ? Quelle est l'allure de $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$?
4. Dresser les variations de f, en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
5. Préciser les éventuelles asymptotes (horizontales/verticales) et tangentes (horizontales/verticales) de $\mathscr{C}_f$.
6. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.
7. La courbe $\mathscr{C}_f$ possède-t-elle des points d'inflexions ? Si oui, vous préciserez les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en ces points ainsi que leurs positions relatives par rapport à $\mathscr{C}_f$. Justifier.
8. Faire une représentation complète de $\mathscr{C}_f$. On prendra soin de faire apparaître tous les éléments utiles à cette construction (asymptotes, tangentes, points particuliers...)

Exercice n°2 : (Séries usuelles)

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer la somme de ces séries :

$$A = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n + n}{3^n} \qquad\qquad B = \sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{n!}.$$

Exercice n°4 : (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$e_1 = (1, -1, 1) \qquad e_2 = (0, 1, 1) \qquad e_3 = (-1, 0, 0).$$

   a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre.

   b) Rappeler la dimension de $\mathbb{R}^3$ et justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   c) Soit $u = (1, 2, 0)$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$.

2. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\} \qquad F = \{(3a - 2b, -2a + 3b, 4a - b) \mid a, b, \in \mathbb{R}\}.$$

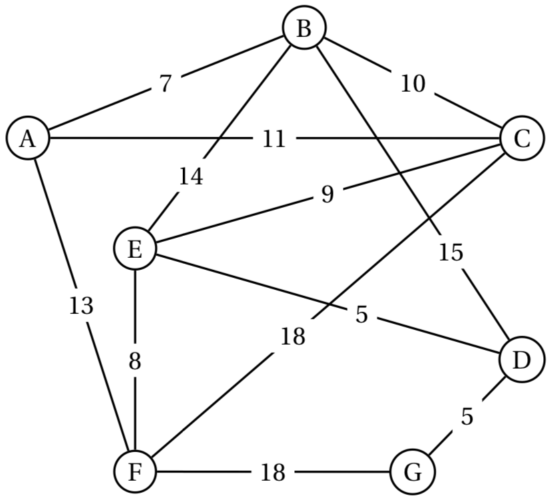
- **a)** Justifier que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de chacun d'eux.
- **b)** Déterminer une base puis la dimension de E et de F.
- **c)** Justifier que $E = F$.

3. Déterminer le rang de la famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{F} = \{(1, 1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 4), (-3, -3, 6)\}.$$

Exercice n°5 : (Graphe)

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

2. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en empruntant seulement des pistes cyclables.

A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.

3. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **a)** Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3.
  Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier votre réponse.
- **b)** Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E.
  Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station.
  Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

4. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. Déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

Problème

Partie I : Quelques propriétés d'une fonction et de sa dérivée

On note f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x+1}}$.

1. **a)** Justifier que f dérivable sur $]-1;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

b) La fonction f est-elle dérivable en -1 ?
On pourra calculer la limite d'un taux d'accroissement à l'aide d'un changement de variable.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution notée α.

4. Recopier et compléter sur votre copie le script Python suivant pour qu'il renvoie un encadrement de diamètre 10^{-6} de α en utilisant l'algorithme de dichotomie :

```
import numpy as np
def g(x):
    y=np.exp(-np.sqrt(x+1))-x
    return y
u=.....
v=.....
while.....
    c=(u+v)/2
    if.....
        v=.....
    else:
        u=.....
print([u,v])
```

Partie II : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0,1]$.

6. **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

8. **a)** Ecrire une fonction python `suite(n)` prenant pour argument d'entrée un entier n et renvoyant la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter sur votre copie le script Python suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-6} près de α :

```
n=0
while.....
    n=.....
print(suite(n))
```

Partie III : Etude de séries

9. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

10. On va s'intéresser à la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - \alpha)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |u_k - \alpha| \leq 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

b) Montrer que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k - \alpha|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

c) Montrer que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k - \alpha|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - \alpha)$ est convergente.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$