DS n°5 de Mathématiques
Lundi 6 Mai 2024, de 8h à 12h

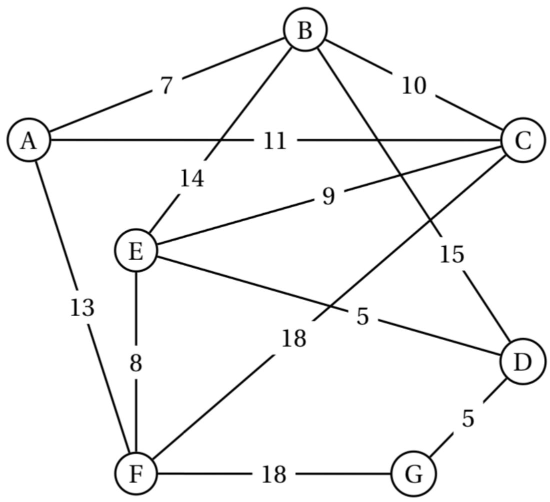
Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.
- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on le barre d'une croix. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : (Graphes)

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.
2. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en empruntant seulement des pistes cyclables.

   A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
3. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3.
Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier votre réponse.

b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E.
Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station.
Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

4. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. Déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer. Pour cela, on appliquera l'algorithme de Dijkstra.

Exercice n°2 : (Séries usuelles)

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer la somme de ces séries :

$$A = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n + n}{3^n} \qquad\qquad B = \sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{n!}.$$

Exercice n°3 : (Résolution numérique d'une équation du second degré)

On souhaite résoudre numériquement l'équation, d'inconnue $x \in]0,1[$, $x^2+x-1=0$. Autrement dit, on cherche une valeur approchée de la solution à cette équation. Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation, d'inconnue $x \in]0,1[$, $x^2+x-1=0$ possède une seule solution que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.

2. Justifier que r_2 est un point fixe de f.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

4. Justifier que f est dérivable, puis déterminer f'.

5. Justifier que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|.$$

7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8. En déduire une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près.

On donne : $\ln(10) \approx 2,3$, $\ln(2) \approx 0,7$ *et* $\ln(3) \approx 1,1$.

Exercice n°4 : (Probabilités et suites)

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On précisera les 4 coefficients de A^n.

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font suivant le protocole suivant :

- Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va dans la pièce A ou dans la pièce C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement A_n :« la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

6. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix}$.

8. **a)** Justifier que $U_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $U_n = A^n U_0$.

c) Déduire de la question **5.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et c_n.

Exercice n°5 : (Suites définies implicitements)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. **a)** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x}f(x).$$

b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. **a)** Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

4. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

5. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 1$.

6. **a)** Soit n un entier supérieur à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε.
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes :

  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
  Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n,eps):
    a=0
    b=1
    while..........:
        c=(a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c)<=n:
            ..........
        else:
            ..........
    return (a+b)/2
```

b) Ecrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près. *On pourra faire appel à la fonction* `approx_u` *définie à la question précédente.*

⋆⋆⋆ **Fin du sujet** ⋆⋆⋆