DS N°5 DE MATHÉMATIQUES
Lundi 5 Mai 2025, de 8h à 12h

Calculatrice non autorisée

Éléments de présentation de la copie : Tout manquement aux règles suivantes sera **fortement** pénalisé.
- **Il est interdit de faire des ratures. Vos recherches doivent être faîtes au brouillon.**
- Pour barrer un paragraphe : on l'encadre entre deux traits horizontaux puis on barre le contenu proprement. Tout cela **à la règle**.
- Pour barrer une phrase : on utilise **une règle**.
- Vos résultats doivent être mis en évidence (proprement surlignés au marqueur, encadrés ou soulignés **à la règle**)
- Vos pages doivent être numérotées suivant le format page n°... / nombre total de pages.

Par ailleurs, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes :

$$A = \sum_{n\geq 1} \frac{3n(-1)^n}{4^n} \qquad B = \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{5^n} \qquad C = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n!}.$$

Exercice n°2 : (ESCP ECT 2019 Exercice n°3)

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.

On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.

L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note :
- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B}_n$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = P(B_n)$ et $v_n = P(\overline{B}_n)$.

1. **a)** Donner la valeur de u_1.

b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B}_n}(B_{n+1})$

2. **a)** A l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, l'expression de u_n en fonction de n.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3. Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(U_n)$.

Tournez la page −− >

4. On code un jour de beau temps par 1 et un jour de mauvais temps par 2.
On admet que la commande `rd.randint(1,6)` renvoie un nombre entier entre 1 et 5 choisi au hasard de façon équiprobable.
Compléter le script Python suivant afin qu'il affiche le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier.

```
import numpy.random as rd
temps = 1
n = 1
for k in range(2,101):
      u = rd.randint(1,6)
      if temps == 1:
            if u < 2:
                  temps = .....
            else:
                  n = .....
      else:
            if .....
                  temps = .....
                  .....
print(n)
```

Exercice n°3 : (ECRICOME ECE 2011 Exercice n°3)

I. Un jeu en ligne.

Une société de jeux de hasard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :
- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.

2. Justifier que $p(H) = \dfrac{3}{84}$.

3. Déterminer les probabilités $p(V)$, $p(D)$ des événements V et D.

4. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$p(N) = \frac{19}{21}$$

5. On note G le gain algébrique du joueur après une partie, exprimé en euros (c'est un nombre positif si le joueur gagne de l'argent, négatif s'il perd de l'argent). Déterminer le support et la loi de G.

6. Déterminer l'espérance et la variance de G (pour la variance, on donnera le résultat sous la forme d'un calcul numérique faisant intervenir des fractions, sans aller au bout de ce calcul ni réaliser de simplification).

II. Cas de joueurs invétérés.

On rappelle que la probabilité de gagner à une partie de ce jeu est $\dfrac{2}{21}$.

7. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

- **a)** Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
- **b)** Indiquer l'espérance et la variance de X.
- **c)** Exprimer la perte algébrique T du joueur en fonction de X.
- **d)** En déduire l'espérance et la variance de T.

8. Quel est le nombre minimum n de parties qu'il devrait jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ?
(*On admettra que* $\ln\left(\dfrac{19}{21}\right) \approx -0,1$ *et* $\ln(2) \approx 0,7$).

Exercice n°4 : (EDHEC ECE 2000 Exercice n°3)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. **a)** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, noté u_n.

- **b)** Calculer u_1 et u_2.
- **c)** Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ u_n \in \left]0; \dfrac{2}{3}\right[$.
- **d)** Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
  - **i)** Proposer une fonction Python `fn(x,n)` prenant en argument un réel positif x et un entier positif non nul n et renvoyant la valeur $f_n(x)$.
  - **ii)** Recopier et compléter sur votre copie la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-3} près de u_n en utilisant l'algorithme de dichotomie. On utilisera la fonction `fn(x,n)` définie à la question précédente :

```
def dichotomie(n):
    u = 0
    v = 2/3
    while .....
        c = (u+v)/2
        if .....
            v = .....
        else :
            u = .....
    return .....
```

2. **a)** Montrer que, pour tout x élément de $]0;1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

- **b)** En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de (u_n).
- **c)** Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. **a)** Déterminer la limite de (u_n^n) lorsque n tend vers $+\infty$.

- **b)** Donner enfin la valeur de ℓ.

Tournez la page −− >

Exercice n°5 : (EDHEC ECE 2020 Exercice n°3)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une part une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Donner, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{[X=k]}(Y = i)$.

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles sur un univers fini :
`rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
import numpy.random as rd
n = int(input("entrez la valeur de n"))
p = float(input("entrez la valeur de p"))
X = .....
Y = .....
```

5. **a)** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$.

b) A l'aide de la formule des probabilités totales et de la question **3.**, montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

c) De même, écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes <u>que l'on ne cherchera pas à simplifier</u>.

6. **a)** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.

b) Justifier que $E(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$

c) En déduire que $E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$

7. **a)** Etablir que :

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$