

Exercice n°1 :

A) Soit $n \in \mathbb{N}^{>1}$. On a:
$$\sum_{k=1}^n \frac{3k(-1)^k}{4^k} = -\frac{3}{4} \sum_{k=1}^n k \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

La série A est géométrique dérivée de raison $-\frac{1}{4} \in]-1; 1[$, elle converge et sa somme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k(-1)^k}{4^k} = -\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = -\frac{3}{4} \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = -\frac{12}{25}.$$

B) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:
$$\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{5^k} = \frac{1}{5^2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{k-2}.$$

La série B est géométrique dérivée de raison $\frac{1}{5} \in]-1; 1[$, elle converge et sa somme est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{5^k} = \frac{1}{5^2} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{k-2} = \frac{1}{5^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^3} = \frac{5}{32}.$$

C) Soit $n \in \mathbb{N}^{>1}$. On a:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{e^k k!} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(1/e)^k}{k!} \right) - 1.$$

La série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/e)^n}{n!}$ est convergente, ainsi la série C converge et sa somme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{e^k k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/e)^k}{k!} \right) - 1 = e^{1/e} - 1 = \underline{\underline{\sqrt{e} - 1}}.$$

Exercice n°2:

②

1) a) $u_1 = 1$

b) $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{4}{5}$, $P_{\bar{B}_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{\bar{B}_n}(\bar{B}_{n+1}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{*1}$. La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{B_n, \bar{B}_n\}$ donne:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(B_n) P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\bar{B}_n) P_{\bar{B}_n}(B_{n+1}) \\ &= \frac{4}{5} u_n + \left(\frac{3}{5} v_n \right) \end{aligned}$$

b) Comme $v_n = P(\bar{B}_n) = 1 - P(B_n) = 1 - u_n$, on déduit que:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n + \frac{3}{5} (1 - u_n) = \frac{1}{5} u_n + \frac{3}{5}.$$

c) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de premier terme $u_1 = 1$ est arithmético-géométrique, on en déduit que: $\forall n \in \mathbb{N}^{*1}$, $u_n = \left(u_1 - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

d) Comme $\frac{1}{5} \in]-1; 1[$, $\left(\frac{1}{5} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}$. Après un grand nombre de jours, la probabilité d'avoir beau temps est de $\frac{3}{4}$.

3) $P(U_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i}(B_n)$

$$\begin{aligned} &= P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{B_{n-1}}(B_n) \\ &= 1 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5} \\ &= \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

n-1 facteurs


```

4) import numpy.random as rd
    temps = 1
    n = 1
    for k in range(2, 101):
        u = rd.randint(1, 6)
        if temps == 1:
            if u < 2:
                temps = 2
            else:
                n = n + 1
        else:
            if u < 4:
                temps = 1
            n = n + 1

    print(n)

```

Exercice n°3: I)

1) Il y a $\binom{9}{3}$ façons de placer les 3 jetons dans les neuf cases et

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 3 \times 4 \times 7 = \underline{84}.$$

2) Les différentes positions des étoiles sont équiprobables et il y a 3 positions où les étoiles sont alignées horizontalement (sur la ligne 1, 2 ou 3), donc $P(H) = \frac{3}{84}$

3) Il y a 3 positions où les étoiles sont alignées verticalement (sur la colonne 1, 2 ou 3), donc $P(V) = \frac{3}{84}$.

Il y a 2 positions où les étoiles sont alignées en diagonale (les deux diagonales du carré), donc $P(D) = \frac{2}{84}$.

$$4) \underline{P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - P(H \cup V \cup D) = 1 - (P(H) + P(V) + P(D))}$$

[par incompatibilité]

$$= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} = \underline{\frac{19}{21}}$$

$$5) G_{ra}: G(\Omega) = \{-2; 18\}$$

(4)

$$\text{et } P(G = -2) = P(N) = \frac{19}{21}$$

$$P(G = 18) = P(\bar{N}) = \frac{2}{21}$$

$$6) \underline{E(G) = -2P(G = -2) + 18P(G = 18)}$$

$$= -2 \times \frac{19}{21} + 18 \times \frac{2}{21} = -\frac{2}{21}$$

$$V(G) = E(G^2) - (E(G))^2 \quad [\text{Formule de Koenig-Huygens}]$$

$$\text{et, par le théorème de transfert, } E(G^2) = (-2)^2 P(G = -2) + 18^2 P(G = 18)$$

$$\text{donc } \underline{V(G) = (-2)^2 \times \frac{19}{21} + 18^2 \times \frac{2}{21} - \left(-\frac{2}{21}\right)^2}$$

II) 7) a) La variable aléatoire X compte le nombre de parties gagnées en 100 parties réalisées de façon indépendante, la probabilité de gagner (le "succès") est $\frac{2}{21}$. Donc $X \hookrightarrow B(100, \frac{2}{21})$

$$\text{Précisément: } X(\Omega) = [0, 100] \text{ et } \forall k \in [0, 100], P(X = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{2}{21}\right)^k \left(\frac{19}{21}\right)^{100-k}$$

$$b) \underline{E(X) = 100 \times \frac{2}{21} = \frac{200}{21}} \quad \text{et} \quad \underline{V(X) = 100 \times \frac{2}{21} \times \frac{19}{21}}$$

$$= \frac{3800}{441}$$

c) A chaque partie gagnée, le joueur perd 18 euros et à chaque partie perdue, le joueur perd 2 euros. Par conséquent:

$$\underline{T = -18X + 2(100 - X) = 200 - 20X}$$

$$d) \underline{E(T) = E(200 - 20X) = 200 - 20E(X) \quad [\text{linéarité}]}$$

$$\underline{V(T) = (-20)^2 V(X)}$$

$$= 400 \times \frac{3800}{441}$$

$$= 200 - 20 \times \frac{200}{21}$$

$$= \frac{200}{21}$$

(5)

8) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées parmi n parties consécutives. On a: $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{2}{21})$.

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que: $P(Y \geq 1) \geq 0,5$.

$$\begin{aligned} \text{Or: } P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{2}{21}\right)^0 \left(\frac{19}{21}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(Y \geq 1) \geq 0,5 \iff 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq 0,5$$

$$\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq 0,5$$

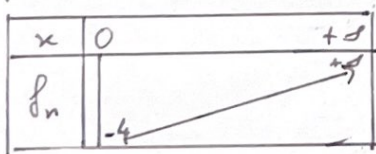
$$\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \approx -\frac{0,7}{-0,1} = 7$$

Le nombre minimum de parties est 7 (ou 8).

Exercice n°4 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{*1}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car polynôme. De plus: $\forall x > 0, f_n'(x) = nx^{n-2} + 18x > 0$. On déduit:



La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) strictement croissante. Le théorème de la bijection nous assure que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f_n(\mathbb{R}_+^*) =]-4; +\infty[$. Or $0 \in]-4; +\infty[$,

donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $x > 0$.

$$f_1(x) = 0 \iff 9x^2 + x - 4 = 0 \iff x = \frac{\sqrt{145} - 1}{18} = u_1$$

$$f_2(x) = 0 \iff 10x^2 - 4 = 0 \iff x = \sqrt{\frac{2}{5}} = u_2$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$. On a: $f_n(0) = -4$, $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4$ ⑥

et $f_n(u_n) = 0$, donc: $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$. Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, on a: $0 < u_n < \frac{2}{3}$.

d) i) def $f_n(x, n)$:

return $x * x * n + 9 * x * x * 2 - 4$

ii) def $dichotomie(n)$:

$u = 0$

$v = 2/3$

while $\text{abs}(u - v) > 10 * 10^{-3}$:

$c = (u + v) / 2$

if $f_n(u, n) * f_n(c, n) < 0$:

$v = c$

else:

$u = c$

return u

2) a) Soit $x \in]0; 1[$. On a:

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - (x^n + 9x^2 - 4)$

$= x^{n+1} - x^n$

$= x^n(x - 1) < 0$ (car $x^n > 0$ et $x - 1 < 0$)

b) Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$. On a: $u_n \in]0; \frac{2}{3}[\subset]0; 1[$. D'où:

$f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Mais comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a aussi

$f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_n < u_{n+1}$

et (u_n) strictement croissante.

c) (u_n) est croissante majorée par $\frac{2}{3}$, elle converge vers $l \in [0; \frac{2}{3}]$ par le théorème de la limite monotone.

3) a) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^{*1}, 0 < u_n < \frac{2}{3}$, ainsi

$\forall n \in \mathbb{N}^{*1}, 0 < u_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
et le théorème d'encadrement nous assure que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^{*1}, f_n(u_n) = u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$.

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient:

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n\right) + 9l^2 - 4 = 0 \quad \text{ic} \quad l^2 = \frac{4}{9} \quad \text{puis} \quad \underline{l = \frac{2}{3} \text{ (car } l > 0)}.$$

Exercice n°5:

1) L'urne U contient uniquement la boule numérotée 1 qui est nécessairement tirée. On réalise alors un unique tirage dans l'urne V et la probabilité de tirer une boule blanche est p . Ainsi $Y \hookrightarrow B(p)$.

2) Il y a équiprobabilité dans le choix de la boule tirée dans l'urne U , donc $X \hookrightarrow U([1, n])$ ic $X(\Omega) = [1, n]$ et: $\forall k \in [1, n], P(X=k) = \frac{1}{n}$.

De plus $\underline{E(X) = \frac{n+1}{2}}$ et $\underline{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

3) $\square$ Si $k < i$ alors on effectuera k tirages dans l'urne V et il est impossible d'obtenir i boules blanches, d'où $\underline{P_{[X=k]}(Y=i) = 0}$.

$\square$ Si $0 \leq i \leq k$ alors on effectuera k tirages dans l'urne V successifs et indépendants où la probabilité d'obtenir une boule blanche (le succès) est p , ainsi on obtiendra i succès avec une probabilité de:

$$\underline{P_{[X=k]}(Y=i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}}$$

4) `import numpy.random as rd`
`n = int(input("entrez la valeur de n"))`
`p = float(input("entrez la valeur de p"))` || `X = rd.randint(1, n+1)`
|| `Y = rd.binomial(X, p)`

5) a) Pour tout nombre $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ obtenu lors du tirage dans U la variable Y peut prendre toutes les valeurs entre $\llbracket 0, k \rrbracket$.
Ainsi Y peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n i.e. $Y|n = \llbracket 0, n \rrbracket$. (8)

b) La formule de probabilités totales associée au système englobant d'événements $\{[X=k]\}_{1 \leq k \leq n}$ donne:

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \sum_{k=1}^n P(X=k) P_{[X=k]}(Y=0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} \quad [\text{par 2) et 3)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)} \end{aligned}$$

c) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De même:

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= \sum_{k=1}^n P(X=k) P_{[X=k]}(Y=i) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} P(X=k) P_{[X=k]}(Y=i) + \sum_{k=i}^n P(X=k) P_{[X=k]}(Y=i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad [\text{par 2) et 3)}] \end{aligned}$$

6) a) $i \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-1)! (k-i)!} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)! (k-i)!} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)! ((k-1)-(i-1))!} = k \binom{k-1}{i-1}$

b) $E(Y) = \sum_{i=0}^n i P(Y=i) = \sum_{i=1}^n i P(Y=i)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n h \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad [p+q=1] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} h \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k h \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}
 \end{aligned}$$

c) Soit $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a: $\sum_{i=1}^h \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = \sum_{j=i-1}^{h-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-1-j}$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h \left(\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h p \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} p = \frac{(n+1)p}{2}
 \end{aligned}$$

$= p (p+q)^{k-1}$ [Binôme de Newton]
 $= p$

7) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{>2}$. Le théorème de Gauss nous assure que:

$$\begin{aligned}
 E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^n i(i-1) P(Y=i) = \sum_{i=2}^n i(i-1) P(Y=i) \\
 &= \sum_{i=2}^n i(i-1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i}
 \end{aligned}$$

On a: $i(i-1) \binom{k}{i} = \frac{k!}{(i-2)! (k-i)!} = k(k-1) \frac{(k-2)!}{(i-2)! ((k-2)-(i-2))!} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}$

ainsi:

$$\begin{aligned}
 E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq k \leq n} k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}
 \end{aligned}$$

b) Soit $n \geq 2$.

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=i-2}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{(k-2)-j} \\ &= p^2 (p+q)^{k-2} \quad [\text{formule du Binôme}] \\ &= p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) p^2 \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k \right) \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{p^2(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{p^2(n+1)}{2} \cdot \frac{2(n-1)}{3} \\ &= \frac{p^2(n^2-1)}{3} \end{aligned}$$

c) Lorsque $n=1$, $Y \hookrightarrow B(p)$. Ainsi $E(Y(Y-1)) = \sum_{i=0}^1 i(i-1)P(Y=i) = 0$ et $\frac{p^2(1^2-1)}{3} = 0$. La formule est donc valable dans ce cas.

$$\begin{aligned} d) \quad V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad [\text{formule de Koenig-Huygens}] \\ &= E(Y(Y-1) + Y) - (E(Y))^2 \\ &= E(Y(Y-1)) + E(Y) - (E(Y))^2 \quad [\text{par linéarité}] \end{aligned}$$