Correction DS n°5

Exercice n°1

1) Oui, il existe une chaîne contenant tous les sommets :
A-B-C-E-D-G-F.

2) Dans ce graphe connexe, il y a exactement deux sommets de degré impair A et D. Donc il existe une chaîne eulérienne partant de A et finissant en D (par exemple). Par contre tous les sommets ne sont pas de degré pair, il n'existe donc pas de cycle eulérien.

3) a) On remarque que $T_{7,5} = 0$. Si $T = M^3$, il n'existerait aucune chaîne de longueur 3 reliant G à E. Or la chaîne de longueur 3 : G-D-B-E, relie bien G à E.
Donc $\underline{M^3 = N}$.

b) Une chaîne allant de F à E passant exactement par deux sommets est exactement de longueur 3. Or $N_{6,5} = 11$, donc il y a 11 telles chaînes.

4) On applique l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
X	7_A	11_A	∞	∞	13_A	∞
X	X	11_A	22_B	21_B	13_A	∞
X	X	X	22_B	20_C	13_A	∞
X	X	X	22_B	20_C	X	31_F
X	X	X	22_B	X	X	31_F
X	X	X	X	X	X	27_D

Le trajet le plus rapide est : A-B-D-G.

Exercice n° 2

- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère la somme partielle d'ordre n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) - 1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Or $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge car $\frac{2}{3} \in]-1,1[$ et $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$

donc : $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n + n}{3^n}$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n}{3^n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - 1 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{11}{4}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On considère la somme partielle d'ordre n

$\sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) - 3$. Or $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ converge car exponentielle

donc $\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{n!}$ converge et sa somme est : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 3 = e^2 - 3$

Exercice n°3 :

1) Le polynôme du second degré x^2+x-1 a pour discriminant $5>0$, ses racines sont $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Comme $2<\sqrt{5}<3$, on a :
$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]\frac{1}{2};1[$ et $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \in]\frac{3}{2};2[$. Donc l'équation $x^2+x-1=0$ possède une unique solution sur $]0;1[$ qui est $r_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) On a : $r_2^2+r_2-1=0$ ie $r_2(r_2+1)=1$
ou encore $r_2 = \frac{1}{r_2+1} = f(r_2)$. Donc r_2 point fixe de f.

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car affine) et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

5) Soit $x \in [\frac{1}{2};1]$. On a : $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ puis $\frac{9}{4} \leq (1+x)^2 \leq 4$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{4}{9}$ puis que : $-\frac{4}{9} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{4}$. Par suite $|f'(x)| \leq \max(|-\frac{1}{4}|, |-\frac{4}{9}|)$ ie $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: "$u_n \in [\frac{1}{2};1]$".

- $P(0)$ est vraie car $u_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. On en déduit que : $\frac{3}{2} \leq 1+u_n \leq 2$ puis que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ ie $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) La fonction f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et : $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right], |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$ par 4) et 5). L'inégalité des accroissements finis nous assure que :

$$\forall x,y \in \left[\frac{1}{2};1\right]; \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{4}{9}|x-y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait par 3) que $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ et par 1) que $r_2 \in \left]\frac{1}{2};1\right[$, on en déduit que :

$$|f(u_n)-f(r_2)| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|.$$

En fin r_2 est un point fixe de f par 2), d'où :

$$\underline{|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|}.$$

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: " $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$ "

- $P(0)$ vrai car : $|u_0 - r_2| = \left|1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right|$ et comme $2 < \sqrt{5} < 3$, on a : $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$, d'où $|u_0 - r_2| < \frac{1}{2} < \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^0}_{=1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$ ainsi $\frac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.
  D'autre part $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$ par 6), donc, par transitivité $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) On cherche une valeur de n telle que $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$, dans ce cas on aura bien, par 7), $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6} \iff n \ln\left(\frac{4}{9}\right) \leqslant -6\ln(10)$

$$\iff n \geqslant \frac{6\ln 10}{2\ln 3 - 2\ln 2} = \frac{3\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}$$

En fin $\frac{3\ln 10}{\ln 3 - \ln 2} \simeq 17{,}25$, on peut choisir $\underline{n = 18}$.

Exercice n° :

1) $\det P = 1\times(-2) - 1\times 1 = -3 \neq 0$

donc $\underline{P \text{ est inversible}}$, et $\underline{P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}$

2) $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}$

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = PD^nP^{-1}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai car $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} = (PDP^{-1})^{n+1} &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})^n \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) La matrice D étant diagonale, on a :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{bmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-1/2)^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1/2)^n\end{bmatrix}}$$

5) Après calcul, on obtient :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{bmatrix}}$$

6) Avec le SCE $\{A_n, B_n, C_n\}$, la FPT nous assure que :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(A_{n+1}).$$

L'énoncé nous assurant que : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$

on obtient : $a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$.

De même, on a :

- $P(B_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(B_{n+1})$

  avec $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$

  d'où $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$.

- $P(C_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(C_{n+1})$

  avec $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{C_n}(C_{n+1}) = 0$

  d'où $c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 6) on a :

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2} b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{4} b_n$$

$$= \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n.$$

8) b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $U_n = A^n U_0$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai. En effet : $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse $U_n = A^n U_0$, donc : $U_{n+1} = A U_n = A^n A U_0 = A^{n+1} U_0$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

  Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Comme la mouche se trouve dans la pièce B à l'instant initial $b_0 = 1$, $a_0 = c_0 = 0$ et donc :

$$U_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $$AU_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = U_{n+1}.$$

c) Grâce aux résultat 8) b) et 5), on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

D'où : $$b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on a : $$a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Comme $a_0 = c_0 = 0$, les relations $(*)$ sont également vraies dans le cas $n = 0$.

$$\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 - 2 = 0\right).$$

Exercice n°5 :

1) a) La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par quotient <u>f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.</u>

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1\right)\frac{1}{2x} = \frac{x-1}{2x} f(x)$$

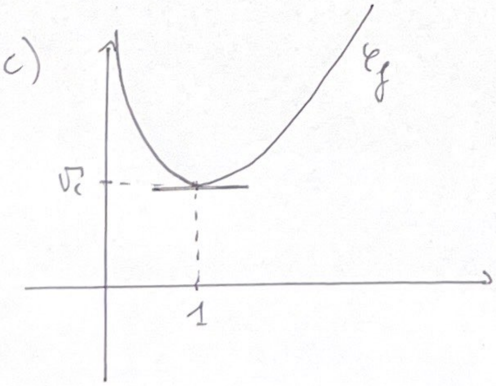
b) Le signe de f' est le signe de $x-1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{2x} > 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty$ par croissances comparées.

On obtient :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

c)



d) La fonction f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement décroissante sur $]0;1[$ (resp. strictement croissante sur $]1;+\infty[$). Le théorème de la bijection continue nous assure que f réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]\sqrt{e};+\infty[$ (resp. $]1;+\infty[$ sur $]\sqrt{e};+\infty[$). Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $n \in]\sqrt{e};+\infty[$ (car $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2 \leq n$), donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in]0;1[$ et $v_n \in]1;+\infty[$ et $0 < u_n < 1 < v_n$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Etant donné que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $1 < v_n$, on a :

$$v_n \leqslant v_{n+1} \iff f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \quad [\text{par } \underline{\text{stricte}} \text{ croissance de } f \text{ sur }]1;+\infty[\,]$$
$$\iff n \leqslant n+1$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est par équivalence.

Donc $\underline{(v_n)_{n\geq 2} \text{ croissante.}}$

b) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers $l > 1$. On aurait par continuité de f sur $]1;+\infty[$:

$$f(v_n) = \frac{e^{\frac{v_n}{2}}}{\sqrt{v_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{l/2}}{\sqrt{l}} \in \mathbb{R}.$$

Or : $\forall n \geqslant 2$, $f(v_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il y a donc contradiction.

La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est donc divergente, comme $(v_n)_{n\geq 2}$ croissante par 2)a) elle possède une limite par le théorème de la limite monotone. Cette limite ne peut être que $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Etant donné que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $0 < u_n < 1$, on a :

$$u_{n+1} \leqslant u_n \iff f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad [\text{par } \underline{\text{stricte}} \text{ décroissance de } f \text{ sur }]0;1[\,]$$
$$\iff n \leqslant n+1$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est par équivalence.

Donc $\underline{(u_n)_{n\geq 2} \text{ décroissante.}}$

b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ décroissante minorée par 0, elle converge par le théorème de la limite monotone vers $l \in [0;1[$.

4) Raisonnons par l'absurde et supposons que $l \in]0,1[$. On aurait, par continuité de f sur $]0;1[$: $f(u_n) = \dfrac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{e^{l/2}}{\sqrt{l}} \in \mathbb{R}$.

Or : $\forall n \geqslant 2$, $f(u_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il y a donc contradiction.

La suite $\underline{(u_n)_{n\geq 2} \text{ converge donc vers } 0.}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On a : $f(u_n) = n$ ie $\dfrac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n$

ou encore $e^{u_n} = n^2 u_n$. Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a :

$n^2 u_n = e^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$

---

6) a)

```
import numpy as np
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > eps:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) <= n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

b) La fonction approx_u(n, α) renvoie une valeur approchée de u_n à α près ie $-\alpha \leq u_n - \text{approx\_u}(n, \alpha) \leq \alpha$. En sommant ces inégalités pour $n \in [2; N]$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} (-\alpha) \leq \left(\sum_{n=2}^{N} u_n\right) - \left(\sum_{n=2}^{N} \text{approx\_u}(n, \alpha)\right) \leq \sum_{n=2}^{N} \alpha$$

$$\text{ie} \quad -(N-1)\alpha \leq \left(\sum_{n=2}^{N} u_n\right) - \left(\sum_{n=2}^{N} \text{approx\_u}(n, \alpha)\right) \leq (N-1)\alpha .$$

Autrement dit $\sum_{n=2}^{N} \text{approx\_u}(n, \alpha)$ est une valeur approchée à $(N-1)\alpha$ près de $\sum_{n=2}^{N} u_n$. Afin d'obtenir une valeur approchée à eps près, on peut par exemple, poser $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{N-1}$, on a alors : $-\text{eps} \leq \sum_{n=2}^{N} u_n - \sum_{n=2}^{N} \text{approx\_u}\left(n, \dfrac{\varepsilon}{N-1}\right) \leq \text{eps}$

La fonction suivante répond à la question :

```
def sp(N):
    S = 0
    for n in range(2, N+1):
        S += approx_u(n, eps/(N-1))
    return S
```