Devoir surveillé n°6, lundi 22 mars 2021

Durée : 4 heures

- L'utilisation de toute calculatrice est interdite.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les étudiants sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements**.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Dans un exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Exercice n°1 Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n} \end{cases}$$

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive.
2. (a) Montrer que f possède un unique point fixe α et le déterminer.

   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer $k \in]0;1[$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant k$.
3. Rappeler l'inégalité des accroissements finis (en précisant bien toutes les hypothèses).
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|.$$
5. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice n°2 Déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie de $\mathbb{R}^3$

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, où on considère les sous-ensembles

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \quad \text{et} \quad z - 2y = 0\}$$

1. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
   Vous donnerez des vecteurs générateurs e_1, e_2 de F et e_3 de G.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les triplets de réels $(\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3$ tels que $u = \lambda e_1 + \mu e_2 + \delta e_3$.
   En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer, par une autre méthode, que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. (a) On note p la projection sur F parallèlement à G. Donner l'expression de $p(x,y,z)$.

   (b) On note s la projection par rapport à F parallèlement à G. Donner l'expression de $s(x,y,z)$.

Exercice n°3 Un problème d'analyse

Dans ce problème, on veut étudier différentes propriétés de la fonction f définie par : $\boxed{x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}}$.

On pourra utiliser le développement limité suivant :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Partie A : Etude de la fonction f

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, puis étudier la classe de f sur cet ensemble.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en -1.
   Définir la fonction prolongée.

   $\boxed{\textit{Dans la suite, on convient de renoter } f \textit{ ce prolongement et on notera } \mathscr{D} =]-1;+\infty[}$.
3. **Dérivabilité de f**
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et donner la valeur de $f'(0)$.
   (b) Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0.
   Discuter de la position de T par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
4. **Etudier des variations**
   (a) Déterminer l'expression de la fonction g telle que la fonction dérivée de f soit donnée par
   $$f' : x \mapsto \frac{g(x)}{x^2(1+x)}.$$
   (b) Montrer que g est une fonction négative sur $\mathscr{D}$ (On pourra étudier les variations de g sur $\mathscr{D}$).
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathscr{D}$.
   (d) Justifier que f admet une fonction réciproque, dont on dressera un tableau de variation.
5. **Caractère $\mathscr{C}^1$ de f :**
   (a) Rappeler le théorème de la limite de la dérivée (en précisant bien toutes les hypothèses).
   (b) Appliquer ce théorème pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$\boxed{(E) : \quad xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}}.$$

L'objet de cette partie est l'étude des solutions y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

6. **Solutions de l'équation homogène**
   Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis sur l'intervalle $]-1;0[$.
7. **Recherche d'une solution particulière de (E)**
   A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$ et sur $]-1;0[$.
   En déduire les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-1;0[$.
8. Justifier alors que la seule solution de (E) qui soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ est la fonction f.

$$\boxed{\text{A partir de maintenant, on pourra utiliser la relation : } \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1+x}}.$$

Partie C : Etude des dérivées successives de f

Dans cette partie, n désigne un entier naturel. On note $f^{(n)}$ la fonction dérivée d'ordre n de f.

9. **Une expression de $f^{(n)}$**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels et un réel λ_n tels que :
   $$\star \quad \forall x \in \mathscr{D} \setminus \{0\}, \quad \boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^n(1+x)^n} P_n(x) + \frac{\lambda_n}{x^n} f(x)} \qquad \text{avec } \lambda_{n+1} = -(n+1)\lambda_n.$$
   On donnera en particulier la valeur de P_0 et de λ_0.
   (b) Expliciter λ_n en fonction de n.

On admet dans la suite que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

10. **Calcul de $f^{(n)}(0)$ et relation pour P_n**
    (a) Déterminer l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $\ell : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
    (b) Prouver que, pour tout $x \in \mathscr{D}$: $\quad xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = \ell^{(n)}(x)$.
    (c) *Application :* Donner l'expression de $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.
    (d) A l'aide de l'égalité $\star$ et de la relation de la question 10. (b), démontrer l'égalité :
    $$P_{n+1}(x) + (n+1)(x+1)P_n(x) = (-1)^n n! x^n.$$

Exercice n°4 Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On définit l'application φ par :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{4}(y,\ 4x+2y+4z,\ y) \end{array}}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des générateurs de son noyau et de son ensemble image.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.

On définit par la suite, pour tout réel λ, l'ensemble :

$$E_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \varphi(x,y,z) = \lambda(x,y,z)\}$$

4. Justifier que l'ensemble E_λ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Décrire, pour tous réels λ et μ distincts, l'espace $E_\lambda \cap E_\mu$.
   Dans ce cas, que peut-on en déduire concernant les sous-espaces vectoriels E_λ et E_μ ?
6. Montrer que E_λ contient une infinité de vecteurs si, et seulement si, λ vaut $-\dfrac{1}{2}$, 0 ou 1.
   Indication : On étudiera le rang d'un système en fonction de λ.
7. On pose $e_0 = \big(1,0,-1\big)$, $e_1 = \big(1,4,1\big)$ et $e_2 = \big(1,-2,1\big)$.

> **On admet les points suivants :**
> - $E_0 = \text{Vect}(e_0)$, $\quad E_1 = \text{Vect}(e_1) \quad$ et $\quad E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect}(e_2)$
> - Tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

   (a) L'application φ est-elle une symétrie vectorielle ? Une projection vectorielle ?
   (b) On fixe u un élément de $\mathbb{R}^3$. Il peut s'écrire $u = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
   Exprimer $\varphi(u)$ en fonction de β, γ, e_1 et e_2.
   (c) Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, une expression de $\varphi^n(u) = \big(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}\big)(u)$ en fonction de de β, γ, e_1 et e_2.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, que : $\varphi^n(0,0,1) = \left(\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{6}\right)$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆