# Fonctions logarithme népérien et exponentielle

## 1) Fonction logarithme népérien

**Définition :** La fonction ln est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ s'annulant en 1

- *Dérivée :* ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$
- *Monotonie :* ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$
- *Valeurs remarquables :* $\boxed{\ln(1) = 0}$ et $\ln(e) = 1$

**Théorème** $\boxed{\textit{produit}\to\textit{somme} :\quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$

<u>*On en déduit que :*</u>

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$
- *Tableau de variation (et limites)*

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| ln | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$

## 2) Fonction exponentielle

**Définition :** La fonction exp est la bijection réciproque de la fonction ln

- *Dérivée :* exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)}$
- *Monotonie :* exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- *Valeurs remarquables :* $\boxed{\exp(0) = 1}$ et $\exp(1) = e \approx 2.718$

**Théorème** $\boxed{\textit{somme}\to\textit{produit} :\quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x\, e^y}$

<u>*On en déduit que :*</u>

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{nx} = (e^x)^n$
- *Tableau de variation (et limites)*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| exp | $0$ | $\nearrow$ $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

## 3) Réciprocité et représentation graphique

**Théorème :** Les fonctions exp étant réciproque l'une de l'autre, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \exp(x) = y \iff x = \ln(y)}$$

- *Représentations graphiques de* ln *et* exp