NOM :
Prénom :

Interrogation n°2 - Sujet A -Correction

Vendredi 30 Septembre

Cours :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \frac{1}{2}\ln(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

Exercices :

1. $(E_1): \quad e^{2x+1} - 3 = 0.$
   - L'ensemble de définition de (E_1) est $D_{(E_1)} = \mathbb{R}$.
   - Soit $x \in D_{(E_1)} = \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} e^{2x+1} - 3 = 0 &\iff e^{2x+1} = 3 \\ &\iff 2x+1 = \ln(3) \\ &\iff x = \frac{\ln(3)-1}{2} \end{aligned}$$

   - L'équation (E_1) possède pour unique solution $\frac{\ln(3)-1}{2}$.
2. $(E_2): \quad \ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$
   - On note $D_{(E_2)}$ l'ensemble de définition de (E_2).

     On a $x \in D_{(E_2)} \iff \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \boxed{\text{et}} \\ x-3 > 0 \\ \boxed{\text{et}} \\ x+5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \boxed{\text{et}} \\ x > 3 \\ \boxed{\text{et}} \\ x > -5 \end{cases} \iff x > 3.$

     Donc l'ensemble de définition de (E_2) est $D_{(E_2)} =]3; +\infty[$.
   - Soit $x \in D_{(E_2)}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5) &\iff \ln((2x+1)(x-3)) = \ln(x+5) \\ &\iff (2x+1)(x-3) = x+5 \\ &\iff 2x^2 - 5x - 3 = x+5 \\ &\iff 2x^2 - 6x - 8 = 0 \\ &\iff x^2 - 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

     Le discriminant du trinôme $x^2 - 3x - 4$ est $(-3)^2 - 4.1.(-4) = 25 > 0$. Ses deux racines sont -1 et 4.
   - L'équation (E_2) possède donc une unique solution qui est 4.

3. (I_1) : $\quad -\dfrac{1}{2}+e^{-x^2}<0$
   - L'ensemble de définition de (I_1) est $D_{(I_1)}=\mathbb{R}$.
   - Soit $x\in D_{(I_1)}$. On a :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}+e^{-x^2}<0 &\iff e^{-x^2}<\frac{1}{2}\\
&\iff -x^2<\ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star\text{]}\\
&\iff -x^2<-\ln(2)\\
&\iff x^2>\ln(2)\\
&\iff x>\sqrt{\ln(2)} \quad \boxed{\text{ou}} \quad x<-\sqrt{\ln(2)}
\end{aligned}$$

   - L'inéquation (I_1) possède pour ensemble de solutions $]-\infty,-\sqrt{\ln(2)}[\,\cup\,]\sqrt{\ln(2)},+\infty[$.
4. (I_2) : $\quad \ln(3-x^2)-\ln(2)\geqslant\ln(x)$
   - On note $D_{(I_2)}$ l'ensemble de définition de (I_2).

   On a $x\in D_{(I_2)} \iff \left\{\begin{array}{l} 3-x^2>0\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3>x^2\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x\in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff x\in]0,\sqrt{3}[.$

   Donc l'ensemble de définition de (I_2) est $D_{(I_2)}=]0,\sqrt{3}[$.
   - Soit $x\in D_{(I_2)}$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(3-x^2)-\ln(2)\geqslant\ln(x) &\iff \ln(3-x^2)\geqslant\ln(x)+\ln(2)\\
&\iff \ln(3-x^2)\geqslant\ln(2x)\\
&\iff 3-x^2\geqslant 2x \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star\text{]}\\
&\iff 0\geqslant x^2+2x-3
\end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme x^2+2x-3 est $2^2-4.1.(-3)=16>0$. Ses deux racines sont 1 et -3. Ainsi x^2+2x-3 est négatif sur l'intervalle $[-3,1]$.
   - L'inéquation (I_2) possède pour ensemble de solutions $[-3,1]\cap D_{(I_2)}=[-3,1]\cap]0,\sqrt{3}[=]0,1]$ car $1<\sqrt{3}$.