NOM :
Prénom :

Interrogation n°2 - Sujet B -Correction

Vendredi 30 Septembre

Cours :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad n\ln(x) = \ln\left(x^n\right)$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) + \ln(y) = \ln\left(xy\right)$

Exercices :

1. $(E_1): \quad e^{3x-1} - 2 = 0.$
   - L'ensemble de définition de (E_1) est $D_{(E_1)} = \mathbb{R}$.
   - Soit $x \in D_{(E_1)} = \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} e^{3x-1} - 2 = 0 &\iff e^{3x-1} = 2 \\ &\iff 3x - 1 = \ln(2) \\ &\iff x = \frac{\ln(2)+1}{3} \end{aligned}$$

   - L'équation (E_1) possède pour unique solution $\dfrac{\ln(2)+1}{3}$.

2. $(E_2): \quad \ln(2x+1) + \ln(x+2) = \ln(x-8)$
   - On note $D_{(E_2)}$ l'ensemble de définition de (E_2).

   On a $x \in D_{(E_2)} \iff \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \boxed{\text{et}} \\ x+2 > 0 \\ \boxed{\text{et}} \\ x-8 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ \boxed{\text{et}} \\ x > -2 \\ \boxed{\text{et}} \\ x > 8 \end{cases} \iff x > 8.$

   Donc l'ensemble de définition de (E_2) est $D_{(E_2)} =]8; +\infty[$.
   - Soit $x \in D_{(E_2)}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) + \ln(x+2) = \ln(x-8) &\iff \ln((2x+1)(x+2)) = \ln(x-8) \\ &\iff (2x+1)(x+2) = x-8 \\ &\iff 2x^2 + 5x + 2 = x - 8 \\ &\iff 2x^2 + 4x + 10 = 0 \\ &\iff x^2 + 2x + 5 = 0 \end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 5$ est $2^2 - 4.1.5 = -16 < 0$. Ce trinôme ne possède aucune racine réelle.
   - L'équation (E_2) ne possède donc aucune solution.

3. (I_1) : $\quad -\dfrac{1}{3}+e^{-x^2}<0$
   - L'ensemble de définition de (I_1) est $D_{(I_1)}=\mathbb{R}$.
   - Soit $x\in D_{(I_1)}$. On a :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}+e^{-x^2}<0 &\iff e^{-x^2}<\frac{1}{3}\\
&\iff -x^2<\ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star\text{]}\\
&\iff -x^2<-\ln(3)\\
&\iff x^2>\ln(3)\\
&\iff x>\sqrt{\ln(3)} \quad \boxed{\text{ou}} \quad x<-\sqrt{\ln(3)}
\end{aligned}$$

   - L'inéquation (I_1) possède pour ensemble de solutions $]-\infty,-\sqrt{\ln(3)}[\,\cup\,]\sqrt{\ln(3)},+\infty[$.

4. (I_2) : $\quad \ln(5-x^2)-\ln(4)\geqslant\ln(x)$
   - On note $D_{(I_2)}$ l'ensemble de définition de (I_2).

   On a $x\in D_{(I_2)} \iff \left\{\begin{array}{l} 5-x^2>0\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 5>x^2\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x\in]-\sqrt{5};\sqrt{5}[\\ \boxed{\text{et}}\\ x>0\end{array}\right. \iff x\in]0,\sqrt{5}[$.

   Donc l'ensemble de définition de (I_2) est $D_{(I_2)}=]0,\sqrt{5}[$.
   - Soit $x\in D_{(I_2)}$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(5-x^2)-\ln(4)\geqslant\ln(x) &\iff \ln(5-x^2)\geqslant\ln(x)+\ln(4)\\
&\iff \ln(5-x^2)\geqslant\ln(4x)\\
&\iff 5-x^2\geqslant 4x \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star\text{]}\\
&\iff 0\geqslant x^2+4x-5
\end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme x^2+4x-5 est $4^2-4.1.(-5)=36>0$. Ses deux racines sont 1 et -5. Ainsi x^2+4x-5 est négatif sur l'intervalle $[-5,1]$.
   - L'inéquation (I_2) possède pour ensemble de solutions $[-5,1]\cap D_{(I_2)}=[-5,1]\cap]0,\sqrt{5}[=]0,1]$ car $1<\sqrt{5}$.