Interrogation n°4 (1h)

Vendredi 15 Décembre

Exercice n°1 (Etude d'une suite définie par une somme) (3 points)
On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Déduire de la question précédente que : $\sqrt{n+1} - 1 \leqslant R_n$.
3. Conclure quant au comportement asymptotique de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$.

Exercice n°2 (Etude d'une suite récurrente) (7 points)

- On considère la fonction g définie, pour tout réel $x > 0$, par :

$$g(x) = \exp\left((x-1)\ln(x)\right).$$

On admet que le tableau de variation de g est donné par :

x	0		1		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1. (a) Justifier **méticuleusement** que les points fixes de la fonction g sont 1 et 2.
   (b) Etablir le tableau de signe de l'expression $g(x) - x$ pour $x > 0$.
2. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 = \dfrac{3}{2}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in]1, 2[$.
   (b) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 = 3$.
   On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
   (a) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (Divergence de la série harmonique, une autre preuve) (3 points)
On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ est croissante.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.