Correction IE n°4 :

Exercice n°1 :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Ainsi : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \iff \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \iff \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geqslant \sqrt{k}$

$\iff \sqrt{k+1} \geqslant 0$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est par équivalence.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. En sommant, membre à membre, les inégalités :
$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Le membre de gauche étant une somme télescopique, on déduit que :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ ie } \underline{\sqrt{n+1} - 1 \leqslant R_n}.$$

3) Etant donné que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - 1 = +\infty$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\sqrt{n+1} - 1 \leqslant R_n$,
le théorème de minoration nous assure que (R_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice n°2 :

1) a) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \exp\big((x-1)\ln x\big) = x \iff (x-1)\ln x = \ln x \\ &\iff (x-1)\ln x - \ln x = 0 \\ &\iff (x-2)\ln x = 0 \\ &\iff x - 2 = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

b) Soit $x > 0$. On a : $g(x) \geqslant x \iff \exp\big((x-1)\ln x\big) \geqslant x$

$\iff (x-1)\ln x \geqslant \ln x$ [par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$]

$\iff (x-2)\ln x \geqslant 0$

On en déduit que le signe de l'expression $g(x) - x$ est le signe de l'expression $(x-2)\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient :

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n \in]1;2[$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $u_0 = \frac{3}{2}$ donc u_0 bien défini par hypothèse et $u_0 \in]1;2[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par hypothèse u_n existe et $u_n \in]1;2[$. En particulier $u_n > 0$, donc $g(u_n) = u_{n+1}$ existe. D'autre part, comme $1 < u_n < 2$ et g strictement croissante (voir tableau de variation) sur $]1;2[$, on déduit que

$$g(1) < g(u_n) < g(2) \quad \text{ie} \quad 1 < u_{n+1} < 2 \quad \left[\begin{matrix}1 \text{ et } 2 \text{ sont les} \\ \text{points fixes de } g\end{matrix}\right]$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Par 1), on sait que : $\forall x \in]1;2[$, $g(x) < x$ et par 2)a) que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]1;2[$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) < u_n$ ie $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Le théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
De plus, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq u_0 = \frac{3}{2}$, on a : $1 \leq \ell \leq \frac{3}{2}$.
En passant à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ on trouve : $\ell = g(\ell)$. Autrement ℓ est un point fixe de g appartenant à $[1;\frac{3}{2}]$, cela ne peut être que $\ell = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) a) Par 1), on sait que : $\forall x > 2$, $g(x) > x$. On sait également que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) > u_n$ ie $u_{n+1} > u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle possède une limite, finie ou infinie ($+\infty$ nécessairement), par le théorème de la limite monotone.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie ℓ. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = 3$, on a : $\ell \geqslant 3$.

En passant à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, on trouve $\ell = g(\ell)$. Donc ℓ doit être un point fixe de g supérieur à 3, ce qui rentre en contradiction avec le résultat de la question 1) a).

En conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice n°3 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a : $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$. Donc $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a : $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Or : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$, donc, en sommant ces inégalités membres à membres, on trouve : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n-(n+1)+1)\frac{1}{2n}$

$= \dfrac{1}{2}$.

En conclusion : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3) La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ étant croissante, elle possède une limite finie ou infinie ($+\infty$) par le théorème de la limite monotone. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. La suite extraite $(H_{2n})_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ converge vers la même limite et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_{2n} - H_n = \ell - \ell = 0$. Par passage à la limite dans l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$, on obtient $0 \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui est absurde. Donc $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}}$ diverge vers $+\infty$.