II Le symbole $\prod$

1 Notations

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u_1, \ldots, u_n$ une suite finie de nombres complexes, on note :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n.$$

Généralisation : Pour $p \leq n$, on note $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_n}_{n-p+1 \text{ facteurs}}$.

Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda = \ldots$

Définition **(Factorielle)**

- Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on appelle n *factorielle* (ou *factorielle* n) l'entier : $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
- Par convention : $\quad 0! = 1$.
- **Relation de récurrence :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\quad n! = n \times (n-1)!$.

Exemples : $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j = \ldots \qquad$ et $\qquad \displaystyle\prod_{j=1}^{n} n = \ldots$

2 Propriétés algébriques

Proposition : Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, deux suites finies de nombres complexes $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (u_k v_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} v_k\right)$

(ii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \ldots \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)$

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k^p = \ldots$

3 Technique de calcul

Proposition : **(Produits télescopiques)**

Soit une suite finie de nombres complexes **non nuls** $u_p, \ldots, u_{n+1}$.

(i) $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_p}{u_{n+1}}$

(ii) $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$