TD n°0 - Calculs algébriques - Rudiments de logique

Exercice n°1 Manipulations algébriques

Les variables a, b, c et x désignent des nombres complexes pour lesquels les expressions ont un sens, n désigne un entier positif.

1. *Simplifier :* $\sqrt{80}$; $\sqrt{252}$; $\dfrac{882}{84}$; $\dfrac{3}{\frac{2}{3}}$; $\dfrac{\frac{3}{2}}{2}$; $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{8}$; $x-\dfrac{x+1}{2}$; $\dfrac{4x}{9}-\dfrac{2x}{3}$; $-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{9}{7}-\dfrac{1}{8}\right)$
2. *Identités remarquables :* Rappeler les 3 identités remarquables classiques, puis développer :
$$(a+b)^3 \quad \text{et} \quad (a-b)^3.$$
3. *Manipuler des puissances :* $3^{n+2}-3^{n+1}-7\times 3^n+6\times 3^{n-2}$; $\dfrac{5^n\times 12^2}{10^n\times 6^4}$; $\dfrac{4^n 3^{2n}-1}{2^n 3^n+1}$; $\dfrac{16^{n+1}+(-4)^{2n+1}+(-2)^{4n}}{8^n}$
4. *Manipuler des racines carrées :* $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$; $\dfrac{(\sqrt{2}+2)^2}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\sqrt{x^2}$; $\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$
5. *Factoriser :* On considère l'expression $A(x)=-(4x+3)^2-(4x+3)(1-x)-4x-3$.
Développer et réduire $A(x)$. Calculer $A(1)$.
Résoudre les équations $A(x)=0$ et $A(x)=4x+3$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
6. *Un peu de tout* : On considère la fonction de la variable réelle $f : x\mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$
Trouver son ensemble de définition D_f, puis montrer que, pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.
Que dire de la limite en $x=1$? Trouver des réels a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

Exercice n°2 Une étude de fonction

On considère la fonction $f : x\longmapsto \dfrac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+3x-1$.
Montrer que $f' : x\longmapsto (x-3)(x^2-3x-1)$. Construire son tableau de variation **complet** (limites comprises), en détaillant chaque étape de l'étude.

Exercice n°3 Connaître et utiliser les quantificateurs

Quantificateur universel : Le symbole $\forall$ se traduit en français par ....
Quantificateur existentiel : Le symbole $\exists$ se traduit en français par ....

Soit V l'ensemble des vaccins. Soit M l'ensemble des maladies virales.
Si $(v,m)\in V\times M$, on notera $v\hookrightarrow m$ la proposition : “v agit sur m”.
Traduire en français les énoncés suivants, et débattre leur pertinence :
a) $\exists v\in V, \forall m\in M, v\hookrightarrow m$ b) $\forall m\in M, \exists v\in V, v\hookrightarrow m$ c) $\forall v\in V, \exists m\in M, v\hookrightarrow m$

Exercice n°4 Déterminer la négation d'une proposition (c'est-à-dire le complémentaire de l'événement)

Donner la négation des propositions suivantes :

a) Mon parapluie est blanc. b) Je possède au moins un parapluie. c) Je possède au plus un parapluie.
d) Je n'ai ni parapluie, ni capuche. e) J'ai un parapluie et une capuche. f) Tous les chats sont blancs.
g) Il existe (au moins) un chat noir. h) Si un aliment est bio alors il est bon.
i) Si un aliment est mauvais alors il n'est pas bio.
Pour les propositions suivantes, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{R}$.
j) $2\le z<3$. k) $\forall x\in\mathbb{R}, 0<f(x)<1$. l) $\exists x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0$. m) $\forall y\in[0,1], \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y$
n) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R}, |x-a|\le\delta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\le\varepsilon$

Exercice n°5 Etudier une proposition avec des quantificateurs

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Si la proposition est vraie, montrez là. Si la proposition est fausse, montrez que sa négation est vraie.

a) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2\ge x$; b) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-x+1\le 0$; c) $\forall x\in\mathbb{R}^\star, \exists y\in\mathbb{R}^\star, xy=1$; d) $\exists y\in\mathbb{R}^\star, \forall x\in\mathbb{R}^\star, xy=1$.

Exercice n°6 L'implication - Signification, vocabulaire

Soit $n\in\mathbb{Z}$. Parmi les phrases suivantes, lesquelles traduisent correctement l'implication $4\,|\,n\Longrightarrow 2\,|\,n$.

a) Si 4 divise n alors 2 divise n. b) 2 divise n si et seulement si 4 divise n. c) Si 2 ne divise pas n alors 4 ne divise pas n.

d) Pour que 2 divise n, il faut que 4 divise n. e) Pour que 2 divise n, il suffit que 4 divise n.

f) La condition 2 divise n est nécessaire pour que 4 divise n. g) La condition 4 divise n est nécessaire pour que 2 divise n.

h) La condition 2 divise n est suffisante pour que 4 divise n.

Exercice n°7 Montrer une implication, une équivalence

Déterminer les relations d'implications entre les propositions P et Q suivantes, i.e. préciser si P implique Q ($P \Longrightarrow Q$), si Q implique P ($Q \Longleftarrow P$), si P est équivalent à Q ($P \Longleftrightarrow Q$) ou rien de tout cela.

a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. P : « x est pair » Q :« x est un multiple de 4 »

b) Soit $x \in \mathbb{Z}$. P : « x est impair » Q : « $\dfrac{x-1}{2}$ est un entier »

c) Soit $x \in \mathbb{Z}$. P : « x est pair » Q :« x^2 est un multiple de 4 »

d) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. P : « $f'(x) = 2x - 1$ » Q : « $f(x) = x^2 - x$ »

Justifications graphiques :

e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. P : « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » Q : « Il existe deux réels $a \leq b$ tels que $f(a) \leq f(b)$ »

f) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. P : « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » Q : « Pour tous réels $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ »

Exercice n°8 Résolutions d'inéquations avec carré ou inverse

1. Représenter les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur des graphiques distincts.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide de ces courbes, trouver parmi les implications suivantes celles qui sont vraies.

   a) $x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$ b) $x^2 \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2$ c) $x \leq 2 \Longrightarrow x^2 \leq 4$ d) $x \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
   e) $x \geq 2 \Longleftarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ f) $x \leq 2 \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ g) $x \leq 2 \Longleftarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ de même signe, tels que $x \leq y$. Comparer x^2 et y^2, puis $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.