

## TD n°10 - Coefficients binomiaux

### Exercice n°1 Rappels sur les factorielles

- Calculer  $n!$  pour  $n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Ecrire plus simplement :

$$(n+1)n!, \quad \frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{(n+2)!}{n!}, \quad (n+2)(n+1)n!, \quad \frac{(n+3)!}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{(n+5)!}{(n+4)!}.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . Calculer la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$  (*Indication* :  $k = (k+1) - 1$ ).
- Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . Calculer la somme  $T_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + k + 1) \times k!$   
(*Indication* :  $k^2 + k + 1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1$ )

### Exercice n°2 Permutations et anagrammes

Combien y a-t-il d'anagrammes de :

*cahier ? élève ? eleve ? taratata ? hurluberlu ?*

### Exercice n°3 Formule de la croise de hockey (d'itération de Pascal)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

L'objectif de cet question est de démontrer que, pour tout  $n$  et  $p$  entiers positifs, la relation

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

- Justifier qu'il est équivalent de montrer que, pour tous  $0 \leq p \leq n$ ,

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

- Faire un triangle de Pascal et faire "apparaître" la formule sur celui-ci. Expliquer le nom donné à cette formule.
- Démonstrations**

- Preuve 1** : En utilisant la formule de Pascal réécrire  $\binom{k}{p}$  comme une différence de coefficients binomiaux afin de faire apparaître une somme télescopique.
- Preuve 2** : fixer  $p \in \mathbb{N}$  et démontrer la relation par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^{\geq p}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)$ , on commencera par écrire  $k(k+1)(k+2)$  à l'aide d'un coefficient binomial.

- Généralisation** : Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \prod_{i=0}^p (k+i)$ .

### Exercice n°4 Démonstrations relatives au binôme de Newton

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la formule du binôme est donnée par

$$(a+b)^n \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \stackrel{(ii)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- Montrer l'égalité (ii). On effectuera un changement d'indice.
- Démontrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  l'égalité (i). On utilisera la formule de Pascal lors de l'hérédité.

### Exercice n°5 Savoir utiliser la formule du binôme de Newton

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Développer :  $(x+y)^7$ ,  $(x-y)^4$ ,  $(x-2y)^3$ .
- Soient  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n & \text{(c)} \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{j}}{3^j} & \text{(e)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ \text{(b)} 2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k & \text{(d)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & \text{(f)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{array}$$

### Exercice n°6 Connaître et savoir utiliser la formule "sans nom"

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ .

- En utilisant la formule sans nom, calculer  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ .
- Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$ .
- En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .

### Exercice n°7 Calculer une somme binomiale

1. Soient  $k, p$  et  $n$  des entiers tels que  $0 \leq k \leq p \leq n$ , montrer que

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

2. En déduire l'expression de  $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ .

### Exercice n°8 Une méthode classique

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . On considère la fonction  $f$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .

On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Réécrire  $f(x)$  sans le symbole  $\sum$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . A l'aide des deux expressions de  $f(x)$ , proposer deux expressions de  $f'(x)$ . En déduire  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . En vous inspirant des questions précédentes calculer  $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ .

### Exercice n°9 Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $k = \text{card}(A)$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $k$  ?

2. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On note  $A_k$  l'ensemble des parties de  $E$  contenant exactement  $k$  éléments. Donner  $\text{card}(A_k)$ .

3. Justifier que  $\{A_0, A_2, \dots, A_n\}$  est une partition de  $\mathcal{P}(E)$ .

4. En déduire que  $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .

### Exercice n°10 Une formule de Vandermonde

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , on suppose que  $A$  et  $B$  sont disjoints et tous deux de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer de deux manières différentes le nombre de parties à  $n$  éléments de  $A \cup B$ .

2. En déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2$ .