TD n°10 - Ensembles et applications

Exercice n°1 Traduire une phrase à l'aide des quantificateurs

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prends jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f possède un minimum.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.

Ensembles

Exercice n°2 Inclusions et égalités d'ensembles en revenant aux éléments

1. Soient $A = \{3 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \left\{\dfrac{2k-5}{3}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   Etudier les inclusions entre ces deux ensembles.
2. Soient $A = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{x \mapsto a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Montrer que $A = B$.
3. Soit $N = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\}$, montrer que $N = \mathbb{R}$.
   Déterminer $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\}$.
4. En raisonnant par analyse-synthèse, écrire sous la forme d'un ensemble connu l'ensemble $F = \left\{i\dfrac{1-z}{1+z} \mid z \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}\right\}$.
5. Montrer que l'ensemble C des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmético-géométriques est la réunion de l'ensemble D des suites arithmétiques et de l'ensemble E des suites de la forme $(\alpha\lambda^n + \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice n°3 Inclusions et égalités d'ensembles avec les opérations ensemblistes

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$.
2. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.
3. Montrer que $(A\backslash B) \cup (A\backslash C) = A\backslash(B \cap C)$.
4. Montrer que $(A \cup B)\backslash(A \cup C) = (B\backslash C)\backslash A$.

Applications

Exercice n°4 Connaître et utiliser le vocabulaire des applications

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

1. Déterminer l'ensemble image de f. Déterminer l'image réciproque de $]1; +\infty[$.
2. Donner $f^{-1}([0; 1])$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
3. L'application restreinte $f_{|\mathbb{R}_+\backslash\{2\}} : \mathbb{R}_+\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice n°5 Etude d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Soient $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \max(0, n-1) \end{array}\right.$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice n°6 Etude d'une application complexe

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{1\} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}\right.$

1. Montrer que f est bijective et expliciter sa réciproque.
2. (a) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{1\}$
   (b) Déterminer $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\})$.

Exercice n°7 Etude d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, xy - y^2) \end{array}\right.$

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. On note $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice n°8 Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application

Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de l'application suivante (si elle est bijective déterminer sa réciproque) :

$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (1, x-y, y) \end{array}\right.$, $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 \end{array}\right.$, $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array}\right.$.

Exercice n°9 Manipuler des applications abstraites

Soient E, F et G trois ensembles. Etant donné $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ établir :

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice n°10 Manipuler des images directes et réciproques

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $A, B \in \mathscr{P}(F)$ et $M, N \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.
4. $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$ et donner un exemple où $f(M \cap N) \neq f(M) \cap f(N)$.
5. On suppose que f est injective. Montrer que $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.
6. Montrer que, si pour tout $(M, N) \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.