

## TD n°10 - Matrices inversibles

### Exercice n°1 Savoir justifier que deux matrices sont inverses

Justifier que les matrices suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  et  $B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

2.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  et  $B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

### Exercice n°2 Justifier l'inversibilité et trouver l'inverse par polynôme annulateur

1. Soit  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

(a) Justifier que  $A^2 = 9I_3$ .

(b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

2. Soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

(a) Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  puis montrer que  $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0_3$ .

(b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

(c) En déduire que  $A^2$  est inversible et déterminer  $(A^2)^{-1}$ .

3. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Montrer qu'il existe des réels  $x$  et  $y$  tels que  $A^2 = xA + yI_3$ .

(b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

(c) Réinterpréter matriciellement le système suivant et le résoudre :

$$(S) \begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

### Exercice n°3 Justifier la non inversibilité par polynôme annulateur

1. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  **non nulles**.

Montrer que si  $AB = 0_n$  alors  $A$  n'est pas inversible et  $B$  n'est pas inversible.

2. Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(a) Montrer que  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$ .

(b) En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

### Exercice n°4 Autour des matrices nilpotentes

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $N^p = 0_n$ . Dans ce cas, on dit que la matrice  $N$  est nilpotente.

1. Soit la matrice  $A = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$ . Calculer le produit  $A(I_n - N)$ .

2. En déduire que  $I_n - N$  est inversible et déterminer son inverse.

3. On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Trouver la matrice  $N$  telle que  $A = I_3 - N$ .

(b) Calculer  $N^k$  pour  $k = 2$  et  $k = 3$ .

(c) En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

### Exercice n°5 Savoir déterminer si une matrice est inversible et calculer l'inverse

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et, le cas échéant, déterminer leurs inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

### Exercice n°6 Travailler avec des matrices à paramètres

Soient les matrices  $A$  suivantes :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs du réel  $\lambda$  la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible ?
2. Déterminer les solutions  $X$  tels que  $AX = \lambda X$  lorsque  $\lambda$  prend les valeurs trouvées à la question précédente.

### Exercice n°7 Etudier une famille de matrices

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $N(a) = \begin{bmatrix} 1-a & -a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -a & a & 1-2a \end{bmatrix}$ . On considère  $\mathcal{F}$  l'ensemble de toutes ces matrices :  $\mathcal{F} = \{N(a), a \in \mathbb{R}\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est stable par produit matriciel, i.e. pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $N(a) \times N(b) = N(c)$ . Exprimer le réel  $c$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $N(a)$  est inversible et montrer que, dans ce cas,  $[N(a)]^{-1} \in \mathcal{F}$ .
3. Soit  $C = N(1)$ . Expliciter  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice n°8 Ma première diagonalisation

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une expression de  $A^n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
2. Déterminer une matrice diagonale  $D$  telle que  $PD = AP$ .
3. Montrer que  $A = PDP^{-1}$ .
4. Montrer par récurrence, sur  $n \in \mathbb{N}$ , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^n P^{-1}.$$

5. Déterminer  $D^n$ . En déduire l'expression de  $A^n$ .

### Exercice n°9 Application de la diagonalisation à une système de suites

On considère les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{1}{3}$  et les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ b_{n+1} = (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ c_{n+1} = (1/3)c_n \end{cases}$$

On pose  $X_n = \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ .

1. Trouver une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
3. Calcul de  $A^n$  :
  - (a) On pose  $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Calculer  $P^{-1}$ , puis  $D = P^{-1}AP$ .  
On doit trouver que  $D$  est une matrice diagonale.
  - (b) Exprimer  $A$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
  - (c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ ,  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
  - (d) En déduire  $A^n$ .
4. Déduire des questions précédentes l'expression de  $X_n$  puis de  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .
5. Montrer que  $a_n + b_n + c_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . EN déduire l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .