TD n°10 - Matrices inversibles

Exercice n°1 Savoir justifier que deux matrices sont inverses

Justifier que les matrices suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice n°2 Justifier l'inversibilité et trouver l'inverse par polynôme annulateur

1. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.
   (a) Justifier que $A^2 = 9I_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (c) En déduire que A^2 est inversible et déterminer $\left(A^2\right)^{-1}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels x et y tels que $A^2 = xA + yI_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (c) Réinterpréter matriciellement le système suivant et le résoudre :

$$(S)\begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ \dfrac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

Exercice n°3 Justifier la non inversibilité par polynôme annulateur

1. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n **non nulles**.
   Montrer que si $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible et B n'est pas inversible.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice n°4 Autour des matrices nilpotentes

Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $N^p = 0_n$. Dans ce cas, on dit que la matrice N est nilpotente.

1. Soit la matrice $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} N^k$. Calculer le produit $A(I_n - N)$.
2. En déduire que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
3. On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (a) Trouver la matrice N telle que $A = I_3 - N$.
   (b) Calculer N^k pour $k = 2$ et $k = 3$.
   (c) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n°5 Savoir déterminer si une matrice est inversible et calculer l'inverse

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et, le cas échéant, déterminer leurs inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice n°6 Travailler avec des matrices à paramètres

Soient les matrices A suivantes :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible ?
2. Déterminer les solutions X tels que $AX = \lambda X$ lorsque λ prend les valeurs trouvées à la question précédente.

Exercice n°7 Etudier une famille de matrices

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $N(a) = \begin{bmatrix} 1-a & -a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -a & a & 1-2a \end{bmatrix}$. On considère $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes ces matrices : $\mathscr{F} = \{N(a),\, a \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est stable par produit matriciel, i.e. pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $N(a) \times N(b) = N(c)$. Exprimer le réel c en fonction de a et b.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $N(a)$ est inversible et montrer que, dans ce cas, $[N(a)]^{-1} \in \mathscr{F}$.
3. Soit $C = N(1)$. Expliciter C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°8 Ma première diagonalisation

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Déterminer une matrice diagonale D telle que $PD = AP$.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$
4. Montrer par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$
5. Déterminer D^n. En déduire l'expression de A^n.

Exercice n°9 Application de la diagonalisation à une système de suites

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = c_0 = \dfrac{1}{3}$ et les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ b_{n+1} = (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ c_{n+1} = (1/3)c_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Calcul de A^n :
   (a) On pose $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.
   On doit trouver que D est une matrix diagonale.
   (b) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction de n, D, P et P^{-1}.
   (d) En déduire A^n.
4. Déduire des questions précédentes l'expression de X_n puis de b_n et c_n en fonction de n.
5. Montrer que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. EN déduire l'expression de a_n en fonction de n.