TD n°11 - Dénombrement

Exercice n°1 Modélisation par des ensembles afin de réaliser des dénombrements

1. Etant donnés des ensembles finis E, F, G, montrer que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(E\cup F\cup G) &= \mathrm{Card}(E)+\mathrm{Card}(F)+\mathrm{Card}(G)\\ &\quad -\mathrm{Card}(E\cap F)-\mathrm{Card}(E\cap G)-\mathrm{Card}(F\cap G)+\mathrm{Card}(E\cap F\cap G)\end{aligned}$$

2. Une classe est constituée de 30 élèves, chacun pouvant apprendre entre une et trois langues vivantes, à choisir parmi l'anglais, l'espagnol et l'italien. On note respectivement A, E, I l'ensemble des élèves suivant l'anglais, l'espagnol, l'italien.
On sait que 28 élèves apprennent l'anglais, 13 l'espagnol et 5 l'italien. De plus, 11 élèves apprennent l'anglais et l'espagnol, 4 l'anglais et l'italien, et 2 l'espagnol et l'italien.
   (a) Déterminer ensemblistement le nombre de trilingues. On note T leur ensemble.
   (b) Traduire en français l'ensemble : $\overline{A}\cup\overline{I}\cup\overline{E}$. Déterminer son cardinal.
   (c) i. Justifier que : $\mathrm{Card}(I\cap(\overline{A}\cap\overline{E}))+\mathrm{Card}(I\cap(A\cup E))=\mathrm{Card}(I)$.
   ii. Ecrire plus simplement : $\mathrm{Card}(A\cap I)+\mathrm{Card}(E\cap I)-\mathrm{Card}(T)$.
   iii. En déduire le nombre d'élèves qui apprennent seulement l'italien.
   (d) Déterminer le cardinal de l'ensemble $L=(I\cap E)\backslash A$.

Exercice n°2 Quelques propriétés des fonctions indicatrices

Soit E un ensemble. On appelle *fonction indicatrice d'une partie A de E* l'application définie pour tout élément $x\in E$ par : $\boxed{\mathbb{1}_A : \left\{\begin{array}{ll} E & \to \{0,1\} \\ x & \mapsto \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x\in A \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.}$

1. Pour tout $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$, démontrer que : $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$, et que : $\mathbb{1}_{\overline{A}}=1-\mathbb{1}_A$.
2. (a) En déduire que pour tout $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$,$\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$.
   (b) On suppose que E est fini.
   Calculer $\displaystyle\sum_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)$, puis retrouver la formule
   $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.
3. On considère une famille $(A_1,\dots,A_n)$ de parties de E.
   (a) Démontrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k}=1-\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{1}_{A_k})$.
   (b) Développer la formule ci-dessus dans le cas $n=3$.
   Si E est fini, déterminer l'expression de card $\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{3}A_k\right)$.

Exercice n°3 Réaliser des dénombrements à l'aide de listes, d'arrangements

1. On considère une urne qui contient 4 boules noires et 7 boules rouges, toutes distinguables (numérotées par exemple). On tire **successivement avec remise** 3 boules de l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant les conditions suivantes :
   (a) Aucune condition ;
   (b) les trois boules sont de la même couleur ;
   (c) au moins une boule de chaque couleur est tirée ;
   (d) la première boule est noire ;
   (e) la deuxième boule est rouge.
2. Reprendre la situation de la question précédente et répondre aux même question dans le cas où on tire **successivement sans remise** 3 boules de l'urne.

Exercice n°4 Réaliser des dénombrements à l'aide de combinaisons

On tire **simultanément** trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes :

1. Aucune condition ;
2. trois as sont tirés ;
3. les trois cartes sont de la même couleur ;
4. au moins un as est tiré ;
5. il y a exactement un as parmi les trois cartes ;
6. les trois cartes sont de hauteurs différentes ;
7. il y a exactement un coeur et un valet parmi les trois cartes.

Exercice n°5 Réaliser des dénombrements dans diverses situations

1. Un jeu consiste à lancer 4 fois une pièce à *pile ou face* et à noter les résultats dans l'ordre de sortie.
Combien de parties sont possibles ?
2. Quel est le nombre de diagonales d'un polygône à n côtés (commencer par traiter des cas particuliers) ?
3. Dans un lycée, à partir de combien d'élèves est-on sûr d'en trouver deux portant les mêmes initiales (1$^{\text{re}}$ lettre du prénom, 1$^{\text{re}}$ lettre du nom) ?
4. Une grille de loto comporte 6 numéros entiers compris entre 1 et 49 inclus.
Combien compte-t-on de grilles possibles : non ordonnées ? ordonnées ?
5. Une plaque minéralogique est constituée de 2 lettres, puis 3 chiffres, puis 2 lettres.
Combien de plaques différentes sont possibles ?
6. Combien y a-t-il d'anagrammes de : *élève* ? *eleve* ? *taratata* ? *hurluberlu* ?

Exercice n°6 Réaliser des dénombrements

Une association de 30 personnes dont 16 femmes doit élire, dans cet ordre, un président, un secrétaire et un trésorier.

1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités si l'on impose que le président doit être une femme ?
3. Combien y a-t-il de possibilités si l'on impose que le président et le trésorier doivent être de sexes différents ?
4. Combien y a-t-il de possibilités si l'on impose qu'un des membres doit être un homme ?

Exercice n°7 Réaliser des dénombrements

Un tournoi de football réunit $2n$ équipes, $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Parmi $2n$ équipes, on en compte n de Paris et n de Marseille.
   Combien y a-t-il de choix possibles pour constituer n matches si l'on suppose que chacun oppose une équipe de Marseille à une de Paris ?
2. Déterminer le nombre de choix possibles pour constituer n matches simultanés entre $2n$ équipes.

Exercice n°8 Montrer une relation classique

En utilisant la formule de Pascal, démontrer que, pour tout n et p entiers tels que $0 \leq n \leq p$

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice n°9 Utiliser des dénombrements pour établir des formules

1. Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$, on montre de deux manières différentes la relation
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} \tag{0.1}$$
   (a) **Méthode 1 :** Montrer (0.1) en revenant à la définition des coefficients binomiaux.
   (b) **Méthode 2 :** Montrer (0.1) en dénombrant de deux manières différentes les couples (A, B) de parties d'un ensemble fini E de cardinal n telles que $\operatorname{card} A = k$, $\operatorname{card} B = p$ et $A \subset B$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice n°10 Utiliser des dénombrements pour établir des formules

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on suppose que A et B sont disjoints et tous deux de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer de deux manières différentes le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.

Exercice n°11 Dénombrement de p-uplets d'ensembles vérifiant une propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le cardinal de $K = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.
2. Déterminer le cardinal de $J = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cap B = \emptyset\}$.
3. Déterminer le cardinal de $K = \{(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3 \mid A \subset B \subset C\}$.