TD n°11 - Ensembles et événements

Exercice n°1 Manipuler différentes écritures d'ensembles

1. Enumérer les éléments de l'ensemble F dans chacun des cas suivants :
   (a) $F = \{3k - 7 \mid k \in [\![1;4]\!]\}$.
   (b) $F = \{x \in E \mid -4,5 < x \leq 15\}$ où $E = \{9; -5; 6; -20; -42; 0,5; 1; -4\}$.
   (c) $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in [\![2;4]\!],\ n = 2k+1\}$.
2. Soit $E = \{-35; -30; -25; -20; -15; -10; -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30\}$.

   Ecrire l'ensemble E sans énumérer ses éléments.

Exercice n°2 Ensemble des parties d'un ensemble

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble $\mathscr{P}(E)$:
$E = \{a, b\}$, $E = \{a, b, c\}$, $E = \{a\}$, $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice n°3 Maitriser les relations d'appartenance, d'inclusion

1. Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 5, 3\}$.

   Pour chaque affirmation ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse.

   (a) $4 \in E$ (b) $4 \subset E$ (c) $\{4\} \subset E$ (d) $\{4\} \in E$

   (e) $A \subset E$ (f) $A \in E$ (g) $A \subset \mathscr{P}(E)$ (h) $A \in \mathscr{P}(E)$

   (i) $\{2; 3\} \subset A$ (j) $\{2; 3\} \subset \mathscr{P}(E)$ (k) $\{2; 3\} \in \mathscr{P}(E)$ (l) $\emptyset \subset A$
2. Compléter avec les symboles $\in$ et $\subset$:

   (a) $0 \ldots [0; 1]$ (b) $\{a\} \ldots \{a, b, c\}$ (c) $\{3\} \ldots \mathbb{N}$ (d) $[-1; 1] \ldots \mathbb{R}$

   (e) $\{0; 1\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N})$ (f) $\{0\} \ldots \mathscr{P}(\{0; 1\})$ (g) $[0; 1] \ldots \mathscr{P}([0; 1])$

   (h) $\{[0; 1] \cup [3; 4]\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (i) $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$ (j) $\mathbb{N} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (k) $\emptyset \ldots \{\emptyset\}$

Exercice n°4 Maitriser les relations d'appartenance, d'inclusion, d'égalité

1. Soient $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-4)(2-x) < 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.
   Montrer que $F \subset E$. A-t-on $E = F$?
2. On note $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $E = \{\alpha u + \beta v + \gamma w \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Est-il vrai que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E$?
   (b) Etudier les inclusions entre E et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+a & a+b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
   (a) Déterminer une matrice A telle que $A \in E$.
   (b) Est-il vrai que $I_2 \in E$?
   (c) Etudier les inclusions entre E et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les ensembles $E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$,
   $S_0 = \{aI_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ et $S_1 = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
   (a) Montrer que $0_2 \in E$.
   (b) Soient $B, C \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda B + \mu C \in E$.
   On dit que E est stable par combinaison linéaire.
   (c) Dans cette question on suppose que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   Etudier les inclusions entre E, S_0, S_1.

Exercice n°5 Utiliser les opérations ensemblistes

Dans chacun des cas suivants A et B sont des parties de E. Déterminer explicitement les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \backslash B$ et $B \backslash A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 4\}$
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$
3. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

Exercice n°6 Montrer une inclusion, une égalité entre ensembles abstraits

Soient X, Y, Z des ensembles. Montrer les affirmations suivantes :

1. Si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$
2. $X \subset Y \iff X = X \cap Y$
3. $X = Y \iff X \cap Y = X \cup Y$
4. $\{X \cap Y, X \cap \overline{Y}\}$ forme une partition de X.

Exercice n°7

On lance deux dés l'un après l'autre : on note le résultat du premier dé, puis on note le résultat du second dé.

1. Quel est l'univers noté Ω de cette expérience ?
2. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement C: "on obtient le même numéro aux deux lancers".
3. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement D: "La somme des dés vaut 4".
4. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement E: "La somme des dés est supérieur ou égal 13".
5. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement F: "Le produit des dés est supérieur ou égal à 15".
6. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement G: "Le produit des dés est égal à 6".

Exercice n°8

On considère une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On tire successivement, avec remise, n boules de cette urne, $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.
Pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note :
B_k l'événement : "on a tiré une boule blanche lors du k-ème tirage"et
R_k l'événement : "on a tiré une boule rouge lors du k-ème tirage".

1. Décrire à l'aide des événements B_k et R_k, $k \in [\![1, n]\!]$, les événements suivants :
   (a) A : "on a obtenu deux boules blanches lors des deux premiers tirages"
   (b) B : "on a obtenu deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
   (c) C : "on a obtenu au moins deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
   (d) D : "on a obtenu au plus deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
   (e) E : "on a obtenu un tirage unicolore"
   (f) F : "on a obtenu une boule blanche lors des cinq premiers tirages"
   (g) G : "on a obtenu au moins une boule blanche"
2. Parmi les événements définis ci-dessus, donner au moins deux exemples de couples d'événements incompatibles.
3. Parmi les événements définis ci-dessus, donner au moins trois exemples où un "événement est inclus dans un autre".
4. Proposer un système complet d'événements associé à cette expérience.

Exercice n°9

On lance n fois de suite un dé à 6 faces. On considère les événements
A : "obtenir le chiffre 4 au moins une fois", B : "obtenir le chiffre 4 au moins deux fois",
Q_i : "obtenir le chiffre 4 au i-ème lancer"pour $i \in [\![1; n]\!]$.

1. Donner une relation d'inclusion entre A et B et en déduire une expression plus simple de $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Décrire à l'aide des événements Q_i et $\overline{Q_i}$ les événements $\overline{A}$ et A.

Exercice n°10

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Martin effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant le tirage suivant.
Il continue d'effectuer ces tirages jusqu'à ce qu'il obtienne soit une boule rouge, auquel cas il a gagné, soit une boule verte, auquel cas il a perdu.
Le jeu continue donc quand il tire une boule noire.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note :
V_k l'événement : "on a tiré une boule verte lors du k-ème tirage"et
R_k l'événement : "on a tiré une boule rouge lors du k-ème tirage"et
N_k l'événement : "on a tiré une boule noire lors du k-ème tirage"

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
A_n : "Martin est déclaré gagnant à l'issue du $n$ème tirage"
B_n : "Martin continue le jeu à l'issue du $n$ème tirage".
On note également A : "Martin gagne le jeu" B : "Martin perd le jeu" et D : "Martin gagne le jeu à un tirage pair".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Décrire à l'aide des événements N_k, R_k et V_k, $k \in [\![1, n]\!]$, les événements A_n et B_n.
2. Exprimer A en fonction des A_n, $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
3. Exprimer D en fonction des A_n, $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
4. Définir l'événement C de telle sorte que les événements A, B et C forment un système complet d'événements.
5. Exprimer C en fonction des B_n, $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.