

## TD n°11 - Probabilités sur un univers fini

### Exercice n°1 Connaître et utiliser les propriétés d'une probabilité

On considère un dé truqué à 6 faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, et de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire.

1. Définir une probabilité modélisant cette situation.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 3 ?

### Exercice n°2 Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité

1. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.
  - (a) Préciser l'univers  $\Omega$  associé à l'expérience, et son cardinal.
  - (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
2. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, puis une seconde boule (sans remise de la première).
  - (a) Préciser l'univers  $\Omega$  associé à l'expérience, et son cardinal.
  - (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
3. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire deux boules simultanément.
  - (a) Préciser l'univers  $\Omega$  associé à l'expérience, et son cardinal.
  - (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

### Exercice n°3 Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité

Une urne contient 10 boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires toutes numérotées.

1. On tire successivement 3 boules **avec remise**. Traiter **dans cet ordre** les trois questions suivantes :
  - (a) Calculer la probabilité que le tirage soit unicolore.
  - (b) Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore.
  - (c) Dédire des questions précédentes la probabilité que le tirage soit bicolore.
2. Reprendre les questions précédentes avec un tirage **sans remise** des 3 boules.
3. Reprendre les questions précédentes avec un tirage **simultané** des 3 boules.

### Exercice n°4 Connaître et utiliser les propriétés d'une probabilité

Une classe est constituée de 30 élèves, chacun pouvant apprendre entre une et trois langues vivantes, à choisir parmi l'anglais, l'espagnol et l'italien. On choisit au hasard un élève de la classe. On note respectivement  $A$ ,  $E$ ,  $I$ , les événements : l'élève choisi apprend l'anglais, l'espagnol, l'italien.

On sait que 28 élèves apprennent l'anglais, 13 l'espagnol et 5 l'italien. De plus, 4 élèves apprennent l'anglais et l'italien, 2 l'espagnol et l'italien, et 1 étudie les trois langues.

1. A l'aide de la formule du crible déterminer la probabilité que l'élève étudie l'anglais et l'espagnol.
2. Dédire de la question précédente la probabilité que l'élève étudie l'anglais ou l'espagnol.
3. Dédire de la question précédente la probabilité que l'élève étudie uniquement l'italien.

### Exercice n°5 Utiliser l'indépendance et l'incompatibilité

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et Face avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , on note :

- $P_k$  l'événement : "Obtenir Pile au  $k$ -ième lancer"
- $F_k$  l'événement : "Obtenir Face au  $k$ -ième lancer"

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer la probabilité des événements suivants :

$A$  : "On obtient uniquement des Piles lors des  $n$  premiers lancers"

$B$  : "On obtient au moins une fois Pile lors de  $n$  premiers lancers"

$C$  : "On obtient pour la première fois Face au  $n$ -ième lancer"

$D$  : "On obtient exactement une fois Face lors des  $n$  premiers lancers"

$E$  : "On obtient exactement deux fois Face avant l'obtention du second Pile"

$F$  : "On obtient exactement  $n$  fois Face avant l'obtention du second Pile"

### Exercice n°6 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Une urne contient 3 boules blanches et 4 noires. On en extrait successivement et sans remise 3. En utilisant la formule des probabilités composées, déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches ?

### Exercice n°7 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Deux urnes contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans la première (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.

Pour  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , on note  $V_i$  : "obtenir une boule verte au tirage  $i$ " et  $R_i$  : "obtenir une boule rouge au tirage  $i$ ". Pour chaque question, vous commencerez par écrire les événements à étudier à l'aide des événements  $R_i$  et  $V_i$ .

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ? deux boules rouges ?
2. On sait que les deux boules tirées sont de même couleur. Quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?
3. Calculer la probabilité pour obtenir une boule verte et une boule rouge.

### Exercice n°8 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Un mobile se déplace sur les sommets d'un carré  $ABCD$ . Il commence au sommet  $A$  à l'instant 0, et à chaque instant jusqu'au temps  $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , bouge sur l'un des trois sommets autres que celui sur lequel il se trouve de façon équiprobable. On note  $A_i$  l'événement "le mobile est sur  $A$  à l'instant  $i$ ".

Déterminer la probabilité que le mobile revienne pour la première fois en  $A$  à l'instant  $n$  où  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ .

### Exercice n°9 Utiliser la FPT et la formule de Baye

Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont abimées, 60% des boîtes abimées contiennent un CD défectueux et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état.

Un client achète un CD. On note  $A$  l'évènement "la boîte achetée est abimée" et  $D$  l'évènement "Le CD acheté est défectueux".

1. Calculer  $P(A)$ ,  $P(\bar{A})$ ,  $P_A(D)$ ,  $P_{\bar{A}}(D)$ ,  $P_A(\bar{D})$ ,  $P_{\bar{A}}(\bar{D})$ .
2. Calculer  $P(D)$ .
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abimée?

### Exercice n°10 Utiliser la FPT et la formule de Baye

Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit  $\frac{1}{2}$  et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

### Exercice n°11 Savoir utiliser la formule de Bayes

On se donne  $N$  urnes numérotées de 1 à  $N$ . L'urne n° $k$  contient  $k$  boules blanches et  $N - k$  boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire une boule au hasard. La boule obtenue est blanche. Déterminer la probabilité que le tirage ait eu lieu dans l'urne  $k$ .

### Exercice n°12 Probabilités et suite 1

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes. Il constate :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 80% d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent un melon une semaine donnée, 70% d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , on note  $A_n$  événement : "le client achète un melon au cours de la semaine  $n$ ". Dans la suite, on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ,  $p_n = P(A_n)$ .

1. Donner  $p_1$ .
2. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ,  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$ .
3. Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

### Exercice n°13 Probabilités et suite 2

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'une photocopieuse obéissant aux règles suivantes :

- le jour de son installation (jour 1), la photocopie fonctionne ;
- si la photocopieuse fonctionne un jour donné, elle a la probabilité  $\frac{1}{10}$  d'être en panne le jour suivant ;
- si la photocopieuse est en panne un jour donné, elle a la probabilité  $\frac{5}{7}$  de fonctionner le jour suivant.

Pour  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , on note  $F_n$  l'évènement "La photocopieuse fonctionne le jour  $n$ " et  $p_n = P(F_n)$ .

1. Etablir une relation entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
2. En déduire la nature de la suite  $(p_n)$ , puis expliciter  $p_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice n°14 Probabilités et suite 3

On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . On suppose qu'initialement le mobile se trouve en  $A$ . Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en  $A_i$ , il passe en  $A_j$  ( $j \neq i$ ) avec une probabilité  $2/5$  dans les deux cas, il reste en  $A_i$  avec la probabilité  $1/5$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit les événements :

$U_n$  : "après  $n$  déplacements le mobile se trouve en  $A_1$ " et  $P(U_n) = u_n$ ;

$V_n$  : "après  $n$  déplacements le mobile se trouve en  $A_2$ " et  $P(V_n) = v_n$ ;

$W_n$  : "après  $n$  déplacements le mobile se trouve en  $A_3$ " et  $P(W_n) = w_n$ .

1. Déterminer  $u_0, v_0$  et  $w_0$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$$

3. On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

Justifier que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .

4. Justifier qu'il existe une matrice  $D$  diagonale telle que  $PD = AP$ .  
En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer la matrice colonne  $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$  en fonction de  $A, n$  et  $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$

6. Déterminer les expressions de  $u_n, v_n$  et  $w_n$ .  
Déterminer les limites de ces trois suites.