

# TD n°12 - Applications et continuité

## Applications

### Exercice n°1 Déterminer des ensembles images par une application

- On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .  
Représenter  $f$  puis déterminer l'image de  $f, f([0; 3]), f([-1; 2])$  et  $f(]-\infty; \sqrt{2}])$ .
- On considère l'application  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ .  
Représenter  $g$  puis déterminer l'image de  $g, g([2; 4]), g([0; 2])$  et  $g([-1; 0[ \cap ]0; 5])$ .
- On considère l'application  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 5x + 6$ .
  - Faire le tableau de variation de  $h$  puis déterminer l'image de  $h, h(]3; +\infty[), h(]-\infty; -1])$  et  $h([0; 5])$ .
  - Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Déterminer le nombre d'antécédent de  $y$  par  $h$  en fonction de la valeur de  $y$ .

### Exercice n°2 Injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application

En cas de bijectivité, on donnera la réciproque. Montrer que :

$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^2 \end{cases}$ injective, non surjective	$f_2 : \begin{cases} ]-\infty; 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1-x) \end{cases}$ bijective	$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow ]-1; +\infty[ \\ x \longmapsto 5x^2 - 1 \end{cases}$ surjective, non injective
$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases}$ non injective, non surjective	$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x \longmapsto \frac{2x+3}{x-3} \end{cases}$ bijective	$f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow ]-1; 1[ \\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$ bijective

### Exercice n°3 Notion d'application réalisant une bijection

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 3}{2x^2 + 1}$ .

- Montrer que l'application  $f$  n'est pas bijective. Est-elle injective ? surjective ?
- Déterminer deux ensembles  $A$  et  $B$ , les plus "grands" possibles (au sens de l'inclusion), afin que  $f$  réalise une bijection de  $A$  sur  $B$ .

### Exercice n°4 Composition d'applications bijectives

- On considère l'application  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow ]3; 4[, x \mapsto \frac{3x+4}{x+1}$ .  
Montrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .
- On considère l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto e^{2x+1}$ .  
Montrer que  $g$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .
- On considère l'application  $h : \mathbb{R} \rightarrow ]3; 4[, x \mapsto \frac{3e^{2x+1} + 4}{e^{2x+1} + 1}$ .
  - Exprimer  $h$  en fonction de  $f$  et  $g$ .
  - En déduire que  $h$  est bijective ainsi que  $h^{-1}$ .

### Exercice n°5 Etude d'une bijection classique

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .  
Montrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

## Continuité

### Exercice n°6 Etudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition :

$a(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$	$d(x) = \begin{cases} \frac{\exp(2x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
$b(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$	$e(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\exp(2x) - 1}{6x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
$c(x) = \begin{cases} \frac{2}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$	

### Exercice n°7 Prolongement par continuité en un point

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ , puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité en  $\{x_0\}$ .

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad h(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

### Exercice n°8 Savoir utiliser le TVI

Les questions qui suivent sont indépendantes.

1. Montrer que l'équation  $x^{17} = x^{11} + 1$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  possède au moins une solution.
2. Montrer que l'équation  $\ln(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$  d'inconnue  $x \in [1; 10]$  possède au moins une solution.
3. Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  et à valeurs dans  $[0; 1]$ .
  - (a) On note  $g : x \mapsto f(x) - x$ . Quel est le signe de  $g(0)$  ? de  $g(1)$  ?
  - (b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$ .

### Exercice n°9 Savoir utiliser le théorème de la bijection continue

1. On considère la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .
  - (a) Dresser le tableau des variations de  $f$  limites comprises. En déduire que  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
  - (b) Justifier que la bijection réciproque, notée  $g^{-1}$ , est continue et dresser le tableau des variations de  $g^{-1}$  en précisant les limites aux bornes.
  - (c) Déterminer l'expression de  $g^{-1}$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f : x \mapsto x - 2 + \ln(x)$ .
  - (a) Faire l'étude complète de la fonction  $f$  limites comprises. En déduire que  $f$  réalise une bijection entre deux ensemble que vous préciserez.
  - (b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Justifier que  $\alpha \in [1; 2]$ .
3. Montrer que l'équation  $x^2 e^x = 1$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une unique solution  $\alpha$ . Justifier que  $\alpha \in [0, 1]$ .

### Exercice n°10 Etude d'une suite définie implicitement du type $f(u_n) = k_n$ n°1

On définit sur  $\mathbb{R}_+^*$  la fonction  $f : x \mapsto x + \ln(x)$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ . En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle  $J$  à préciser et donner le tableau de variation de la bijection réciproque notée  $f^{-1}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . Montrer que l'équation  $f(x) = n$  possède une unique solution, notée  $u_n$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Exprimer cette solution à l'aide de  $f^{-1}$ .
3. Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$  est croissante et donner sa limite.

### Exercice n°11 Etude d'une suite définie implicitement du type $f(u_n) = k_n$ n°2

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . On considère l'équation  $x \ln(x) = n$  d'inconnue  $x \in [1; +\infty[$ . On admet que  $2 < e < 3$ .

1. Montrer que cette équation possède une unique solution qu'on notera  $u_n$ .
2. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$  est croissante.
3. Vérifier que  $f(e) = e$ . En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ ,  $e \leq u_n$ .
4. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ ,  $u_n \leq n$ .
5. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ ,  $\frac{n}{\ln n} \leq u_n$ .  
Conclure quant au comportement asymptotique de  $(u_n)$ .

### Exercice n°12 Etude d'une suite définie implicitement du type $f_n(u_n) = 0$ n°1

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n : x \mapsto x^n + 1 - nx$ .

1. Etudier les variations de  $f_n$  sur  $[0, 1]$ .
2. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution sur  $[0, 1]$ . On note  $u_n$  cette valeur.
3. **Monotonie de  $(u_n)$** 
  - (a) Etudier le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
  - (b) En déduire que  $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ .
  - (c) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$  puis la convergence de cette suite.
4. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ .
5. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice n°13 Etude d'une suite définie implicitement du type $f_n(u_n) = 0$ n°2

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$ . On considère l'équation  $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+$ .

On introduit la fonction  $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  limites comprises.
2. Montrer que cette équation possède une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$  qu'on notera  $u_n$ .  
Justifier que  $u_n \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 3}}$  est croissante.
4. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 3}}$  converge vers un réel  $\ell$ . Donner un encadrement de  $\ell$ .
5. Justifier que  $u_n^n$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
6. En déduire la valeur de  $\ell$ .