TD n°12 - Coefficients binomiaux

Exercice n°1 Rappels sur les factorielles

1. Calculer $n!$ pour $n \in [\![0;5]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :
$$(n+1)n!,\quad \frac{(n+1)!}{n!},\quad \frac{(n+2)!}{n!},\quad (n+2)(n+1)n!,\quad \frac{(n+3)!}{n!}\quad \text{et}\quad \frac{(n+5)!}{(n+4)!}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (*Indication :* $k = (k+1) - 1$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer la somme $T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1) \times k!$
(*Indication :* $k^2+k+1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1$)

Exercice n°2 Permutations et anagrammes

Combien y a-t-il d'anagrammes de :

cahier ? *élève* ? *eleve* ? *taratata* ? *hurluberlu* ?

Exercice n°3 Utilisations de la formule de Pascal

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. L'objectif de cet question est de démontrer que, pour tout n et p entiers tels que $0 \leq n \leq p$
$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$
En utilisant la formule de Pascal réécrire $\binom{k}{n}$ comme une différence de coefficients binomiaux afin de faire apparaître une somme télescopique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$, on commencera par écrire $k(k+1)(k+2)$ à l'aide d'un coefficient binomial.
3. **Enigme :** Le nombre 2024 est tétraédrique, on peut faire une pyramide tétraédrique de boules avec 2024 boules. De combien d'étages ? Quel est le nombre tétraédrique suivant ?

Exercice n°4 Démonstrations relatives au binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme est donnée par
$$(a+b)^n \overset{\text{(i)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1. Montrer l'égalité (ii). On effectuera un changement d'indice.
2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'égalité (i). On utilisera la formule de Pascal lors de l'hérédité.

Exercice n°5 Savoir utiliser la formule du binôme de Newton

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Développer : $(x+y)^7$, $(x-y)^6$, $(x-2y)^5$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$ (c) $\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{3^j}$ (e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(b) $2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ (d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ (f) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Exercice n°6 Connaître et savoir utiliser la formule "sans nom"

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Montrer que : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
3. Montrer que : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$, puis calculer $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
4. En vous inspirant des calculs précédents, calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice n°7 Formule de Vandermonde

1. Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$, montrer que
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$
2. En déduire l'expression de $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.