TD n°12 - Dénombrement, coefficients binomiaux

Exercice n°1 Rappels sur les factorielles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer $n!$ pour $n \in [\![0;5]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :

$$(n+1)n!, \quad \frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{(n+2)!}{n!}, \quad (n+2)(n+1)n!, \quad \frac{(n+3)!}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{(n+5)!}{(n+4)!}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$

   (*Indication :* $k = (k+1) - 1$)

4. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer la somme $T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1) \times k!$

   (*Indication :* $k^2 + k + 1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1$)

Exercice n°2 Réaliser des dénombrements dans des situations de tirages successifs avec ou sans remises

1. On considère une urne qui contient 4 boules noires et 7 boules rouges, toutes distinguables (numérotées par exemple). On tire **successivement avec remise** 3 boules de l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant les conditions suivantes :
   (a) Aucune condition ;
   (b) la première boule est noire ;
   (c) la deuxième boule est rouge ;
   (d) les trois boules sont de la même couleur ;
   (e) au moins une boule de chaque couleur est tirée.
2. Reprendre la situation de la question précédente et répondre aux même question dans le cas où on tire **successivement sans remise** 3 boules de l'urne.

Exercice n°3 Réaliser des dénombrements dans des situations de tirages simultanés

On tire **simultanément** trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes :

1. Aucune condition ;
2. trois as sont tirés ;
3. les trois cartes sont de la même couleur ;
4. au moins un as est tiré ;
5. il y a exactement un as parmi les trois cartes ;
6. les trois cartes sont de hauteurs différentes.

Exercice n°4 Réaliser des dénombrements dans diverses situations

1. Un jeu consiste à lancer 4 fois une pièce à *pile ou face* et à noter les résultats dans l'ordre de sortie. Combien de parties sont possibles ?
2. Dans un lycée, à partir de combien d'élèves est-on sûr d'en trouver deux portant les mêmes initiales (1re lettre du prénom, 1re lettre du nom, dans cet ordre) ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes de :

   élève ? *eleve* ? *taratata* ? *hurluberlu* ?
4. Quel est le nombre de diagonales d'un polygône à n côtés (commencer par traiter des cas particuliers) ?
5. Une plaque minéralogique est constituée de 2 lettres, puis 3 chiffres, puis 2 lettres. Combien de plaques différentes sont possibles ?
6. Une grille de loto comporte 6 numéros entiers compris entre 1 et 49 inclus. Combien compte-t-on de grilles possibles : non ordonnées ? ordonnées ?
7. Un tournoi de football réunit $2n$ équipes, $n \in \mathbb{N}^\star$. Parmi $2n$ équipes, on en compte n de Paris et n de Marseille.
   (a) Combien y a-t-il de choix possibles pour constituer n matches si l'on suppose que chacun oppose une équipe de Marseille à une de Paris ?
   (b) Déterminer le nombre de choix possibles pour constituer n matches simultanés entre les $2n$ équipes.

Exercice n°5 Savoir utiliser la formule du binôme de Newton

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Développer : $(x+y)^7$, $(x-y)^6$, $(x-2y)^5$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$

   (b) $2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k$

   (c) $\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{3^j}$

   (d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

   (e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

   (f) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Exercice n°6 Connaître et savoir utiliser la formule "sans nom"

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Montrer que : $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$.
2. En déduire que : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $n\dbinom{n-1}{k-1} = k\dbinom{n}{k}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice n°7 Une méthode classique

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Réécrire $f(x)$ sans le symbole $\sum$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Proposer deux expressions de $f'(x)$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. En vous inspirant des questions précédentes calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Exercice n°8 Encore une formule de Pascal

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes que, pour tout n et p entiers tels que $0 \leq n \leq p$

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

1. Montrer la relation ci-dessus par récurrence.
2. En utilisant la formule de Pascal réécrire $\dbinom{k}{n}$ comme une différence de coefficients binomiaux afin de faire apparaître une somme télescopique.

Exercice n°9 Formule de Vandermonde

1. Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$, montrer que
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.