TD n°12 - Limites et continuité

Calculs de limites

Exercice n°1 Calculer des limites (par opérations, taux d'accroissement, croissances comparées)

Déterminer les limites suivantes si elles existent (et montrer qu'elles n'existent pas le cas échéant)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$
4. $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x).\ln(\ln(x))$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x)$
10. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$
11. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$

Exercice n°2 Etudier des limites de fonctions faisant intervenir la partie entière

1. Soit $f : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^\star$.
   Montrer que f est constante sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$.
   Etudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   Etudier ses limites à gauche et à droite en 1 et -1.
2. Soit $g : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
   Etudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

Continuité

Exercice n°3 Prolonger par continuité des fonctions

Les fonctions suivantes sont-elles définies ? continues ? prolongeable par continuité sur l'intervalle proposé ?

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3-x-6}{x-2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $i : x \mapsto (\tan(x))^{\tan(2x)}$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
5. $j : x \mapsto \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4 Résoudre des équations fonctionnelles

1. On se propose de déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant les contraintes :
   $$(C_1) \quad : \quad f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$
   On raisonne par analyse-synthèse.
   (a) **Analyse :** On suppose l'existence d'une fonction f vérifiant (C_1).
      i. Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
      ii. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$.
      En déduire que, pour tous $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
      iii. Montrer que, pour tous $q\in\mathbb{Q}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(qx)=qf(x)$.
      iv. En utilisant la continuité de f, montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$, où $a=f(1)$. *Indication : Considérer une suite de rationnels qui converge vers x.*
   (b) **Synthèse :** Déterminer parmi les fonctions candidates celles qui vérifient (C_1).
2. On se propose de déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant les contraintes :
   $$(C_2) \quad : \quad f \text{ est continue en } 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ f(2x)=-f(x)$$
   (a) **Analyse :** On suppose l'existence d'une fonction f vérifiant (C_2).
      i. Que vaut nécessairement $f(0)$?
      ii. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(-1)^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
      iii. En déduire que, nécessairement, f est constante.
   (b) **Synthèse :** Déterminer parmi les fonctions candidates celles qui vérifient (C_2).
3. Déterminer les fonctions f continues en -1 vérifiant la propriété :
   $$(C_3) \quad : \quad f \text{ est continue en } -1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ f(2x+1)=f(x)$$

Exercice n°5 TVI et théorème des bornes atteintes pour résoudre des problèmes

1. *Pour des problèmes de point fixe :*
   (a) Soit $f:[a;b]\to[a;b]$ continue. Montrer que f possède (au moins) un point fixe.
   (b) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f possède un unique point fixe.
   Ce résultat est-il toujours vrai si f est croissante ?
2. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue sur I un intervalle telle que $f(I)$ soit fini.
   Montrer que f est constante.
   Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus f continue, ou si I n'est pas un intervalle ?
3. Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que :
   $$\forall x\in\mathbb{R}, \quad f(x)^2-2f(x)-1=0.$$
4. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue ayant une limite finie en $+\infty$.
   Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?
5. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
   Montrer que f admet un minimum.
6. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\sin(x))}{x}=0$.