

## TD n°13 - Variables aléatoires finies

### Exercice n°1 Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Pour chaque variable aléatoire  $X$ , donner  $X(\Omega)$ . Donner la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau puis d'une expression générale si possible.

1. Soit  $X_1$  une variable aléatoire de support  $X_1(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$  telle que

$$P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4), \quad P(X_1 < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(X_1 > 5) = \frac{1}{3}.$$

2. On tire, sans remise, deux boules dans une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On note  $X_2$  le nombre de boules rouges obtenues et  $Y_2 = |X_2 - 1|$ .
3. On lance deux fois de suite un dé à six faces équilibré. On note  $X_3$  le minimum des deux dés et  $Y_3 = (X_3 - 4)^2$ . Généraliser au cas de deux dés équilibrés à  $n$  faces.

### Exercice n°2 Utilisation du SCE associé à une variable aléatoire

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . On considère une première urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et une deuxième urne contenant 2 boules noires et une boule blanche. On pioche une boule dans la première urne et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. On pioche alors successivement et avec remise  $X$  boules dans la deuxième urne et on note  $Y$  la variable aléatoire égale à 0 si on ne pioche que des boules noires et 1 sinon.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. (a) Déterminer le support de  $Y$ .  
(b) Pour tous  $k \in Y(\Omega)$ , déterminer  $P_{[X=k]}(Y = 0)$ .  
(c) En déduire la loi de  $Y$ .

### Exercice n°3 Découverte des lois usuelles

Pour chaque variable aléatoire  $X$ , donner  $X(\Omega)$ . Donner la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau puis d'une expression générale si possible.

1. Une urne contient des jetons tous numérotés 1. On pioche un jeton au hasard et on note  $X_1$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient des boules numérotées de 7 à 11. On tire une boule au hasard de l'urne et on note  $X_2$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
3. On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile est  $p \in ]0, 1[$ . On note  $X_3$  la variable aléatoire égale à 0 si on obtient Pile et 1 si on obtient Face.
4. On lance trois fois de suite une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile est  $p \in ]0, 1[$ . On note  $X_4$  le nombre de Pile obtenu. Même question si on lance quatre fois la pièce, puis trente fois.

### Exercice n°4 Calculer l'espérance, la variance d'une variables aléatoire

En reprenant les variables aléatoires de l'exercice n°1 précédents :

1. Calculer l'espérance de  $X_1$  et de  $Y = 6X_1 - 1$  ;
2. Calculer l'espérance de  $X_3$  ;
3. Reprendre les deux questions précédentes pour la variance.

### Exercice n°5 Reconnaître une loi usuelle

Dans les cas suivants reconnaître la loi de  $X$ , donner sa loi, son espérance et sa variance.

1. Alfred achète 20 marrons à un forain. Chaque marron à la probabilité  $\frac{1}{3}$  d'être véreux.  $X$  est la variable aléatoire égale au nombre de marrons véreux achetés.
2. On dispose d'un dé dont 4 côtés sont numérotés 1 et les autres 0. On lance ce dé.  $X$  est la variable aléatoire égale au résultat qui apparaît.
3. On dispose de 10 dés dont 4 côtés sont numérotés 1 et les autres 0. On lance ces 10 dés simultanément.  $X$  est la variable aléatoire égale à la somme des résultats qui apparaissent.
4. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule au hasard.  $X$  est le numéro de la boule tirée.
5. On sait qu'en France, il y a 10% de gauchers. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans une classe de 40 élèves.

### Exercice n°6 Utiliser le théorème de transfert

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Calculer l'espérance de  $Y = 2^X$ .

### Exercice n°7 Reconnaître et utiliser les lois usuelles

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de manière indépendante et équiprobable de une ou deux cases à chaque saut.

Au départ, elle est sur la case 0. Soit  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après  $n$  sauts.

1. Reconnaître la loi de  $X_1$  puis donner  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .
2. On appelle  $Y_n$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des  $n$  premiers sauts. Déterminer la loi de  $Y_n$  puis  $E(Y_n)$  et  $V(Y_n)$ .
3. Exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$ . En déduire la loi de  $X_n$ ,  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$ .

## Exercice n°8 Exercice Bilan

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance  $n$  fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant. Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ), et celle d'obtenir Face est  $1 - p$ .

On notera  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et  $G$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (éventuellement négatif). Enfin, on notera  $A$  l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance de la variable aléatoire  $G$  est positive.

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que  $n = 3$  et  $p = \frac{2}{3}$ .

1. Reconnaître la loi de  $X$  et vérifier que  $P(A) = \frac{13}{27}$ .
2. Montrer que  $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ , puis expliciter la loi de  $G$ .
3. Calculer l'espérance de  $G$ . Le jeu est-il favorable au joueur ?

### Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où  $n$  est un entier naturel non nul et  $p \in ]0, 1[$ . Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "A ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur  $p$  et  $n$  pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par :  $Y = (-1)^X$ .

Autrement dit,  $Y$  prend la valeur 1 lorsque  $X$  prend une valeur paire, et  $Y$  prend la valeur  $-1$  lorsque  $X$  prend une valeur impaire.

4. (a) On note  $Z = \frac{Y+1}{2}$ . Déterminer  $Y(\Omega)$ , puis reconnaître la loi de  $Z$ .  
(b) Démontrer que  $E(Y) = 2P(A) - 1$ .
5. (a) Donner la loi de  $X$ .

(b) En déduire que l'on a également :  $E(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , puis que  $E(Y) = (1-2p)^n$ .

6. Exprimer alors la valeur de  $P(A)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

7. Démontrer que :  $P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[ p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } "n \text{ est pair}" \right]$ .

### Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que  $P(A) \geq \frac{1}{2}$ ), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire  $E(G) \leq 0$ ).

8. Exprimer  $G$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . En déduire que  $E(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k)$ .
9. Démontrer que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .
10. Montrer que  $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$ .
11. Démontrer alors que :  $P(A) \geq \frac{1}{2} \text{ ET } E(G) \leq 0 \iff p \leq \frac{1}{2}$ .
12. (a) Etudier la fonction  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  par :  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f(x) = x(1-2x)^{n-1}$ .  
(b) Pour une valeur de  $n$  fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à  $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

### Exercice n°9 Etude d'une suite de variables aléatoires

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant  $n$  sur le point d'abscisse  $k$ , alors à l'instant  $n+1$ , il sera sur le point d'abscisse  $k+1$  avec probabilité  $p \in ]0, 1[$  et en 0 sinon. On appelle  $X_n$  la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ . On a donc  $X_0 = 0$ .

1. Reconnaître la loi de  $X_1$ .
2. Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ,  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer, en fonction de  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la valeur de  $P_{[X_{n-1}=i]}(X_n = k)$ .
4. A l'aide de la formule des probabilités totales associée à un système complet d'événements que vous préciserez, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k-1).$$

5. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , on a :

$$E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$$

puis en déduire  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .