# TD n°13 - Les matrices

**Exercice n°1 Utiliser les notations matricielles**

1. Construire les 3 matrices $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ de coefficients :

   (a) $(i+j)$ (b) $(\max(i,j))$ (c) $(x_j{}^{i-1})$ où les $x_j$ sont réels.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Donner la forme générale des matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tous $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ :

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si} \quad i+j = n+1 \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{i,j} = 0 & \text{si} \quad i \geq j+1 \\ b_{i,j} = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice n°2 Réaliser des produits, des transposées de matrices**

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Indiquer quels produits entre deux de ces matrices ont un sens et, le cas échéant, donner la matrice produit.
2. Etudier l'existence des matrices : $M = {}^tAC\,{}^tB$ et $N = A^tCB$. Sans calcul, exprimer ${}^tM$ en fonction des matrices $A$, $B$ et $C$. En déduire les coefficients de ${}^tM$, puis de $M$.

**Exercice n°3 Manipuler des matrices symétriques et antisymétriques**

Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & {}^tAM + MA \end{cases}$

1. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ alors $f(M) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ alors $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice n°4 Manipuler des produits matriciels abstraits**

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence : ${}^tXX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Justifier que cette équivalence n'est plus valide.
3. Justifier que l'équivalence 1. reste vraie pour des matrices $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**Exercice n°5 Calculer les puissances d'une matrice**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $N^2$ et $N^3$. Déterminer alors $N^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n$ (on exprimera $A$ en fonction de $N$).

2. Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{bmatrix}$.

   (a) On considère la matrice $N = M - I_3$. Déterminer les matrices $N$ et $N^2$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $M^n$.

   (c) Exprimer $M^2$ en fonction de $M$ et de $I_3$.
   Pourquoi peut-on dire que $M$ est inversible ? Déterminer alors l'expression de $M^{-1}$.

**Exercice n°6 Savoir montrer qu'une matrice est inversible et déterminer son inverse**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $N$ est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.

1. Soit la matrice $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} N^k$. Calculer les produits $A(I_n - N)$ et $(I_n - N)A$.
   Que peut-on en déduire ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Justifier que la matrice $\lambda I_n - N$ est inversible et que $(\lambda I_n - N)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{\lambda^{k+1}}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Justifier que la matrice $\lambda I_n + N$ est inversible et trouver son inverse.

**Exercice n°7 Résoudre un système linéaire de suites**

Soient les suites $(x_n)$, $(y_n)$ et $(z_n)$ définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &=& 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} &=& 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &=& -x_n + 2y_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$. Le but est de déterminer $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = AC_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $C_n$ en fonction de $A$ et de $C_0$.
3. (a) Ecrire $A^2$ en fonction de $A$ et $I_3$.

   (b) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_nA + v_nI_3$.

   (c) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.

   (d) Déterminer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer l'expression des suites $(x_n)$, $(y_n)$ et $(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice n°8 Savoir étudier l'inversibilité d'une matrice à paramètre**

Discuter l'inversibilité de $A - \lambda I_3$ suivant la valeur du paramètre réel $\lambda$ dans les cas

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

**Exercice n°9 Inversibilité d'une matrice et calcul de l'inverse**

Etudier l'inversibilité des matrices suivantes et, le cas échéant, déterminer l'inverses associé.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercice n°10 Puissances d'une matrice par diagonalisation**

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et déterminer $P^{-1}$.
2. On considère la matrice $D = P^{-1}AP$.
   Déterminer $D$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $D^n$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n$.

**Exercice n°11 Travail sur la notion de trace d'une matrice carrée**

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace de* $M$, et on note $\mathrm{tr}(M)$ le nombre

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}.$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrer que
$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$$
2. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\left({}^tA\right) = \mathrm{tr}\,(A)$.
3. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\,(A)$.

**Exercice n°12 Utiliser les matrices d'opérations élémentaires**

1. On considère les deux matrices : $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
   Justifier que les deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes par colonnes.
   Le sont-elles par lignes ?
2. On dit que deux matrice $A$ et $B$ sont équivalentes et on note $A \sim B$, s'il existe deux matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $A = PBQ$.
   A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, justifier qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r$ est équivalente à la matrice $J_{n,p,r} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right]$