TD n°13 - Probabilités sur un univers fini

Exercice n°1 Connaître et utiliser les propriétés d'une probabilité

On considère un dé truqué à 6 faces. Les probabilités d'apparition des faces paires sont égales, et de même pour les faces impaires. La probabilité d'obtenir une face paire est deux fois celle d'obtenir une face impaire.
Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 3 ?

Exercice n°2 Savoir calculer des probabilités dans différentes situations

1. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire deux boules simultanément.
   (a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.
   (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
2. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, puis une seconde boule (sans remise de la première).
   (a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.
   (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
3. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.
   (a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.
   (b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

Exercice n°3 Calculer des probabilités dans une situation de tirage simultané ou avec remise

Une urne contient 10 boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires toutes numérotées.

1. On tire successivement 3 boules **avec remise**. Traiter **dans cet ordre** les trois questions suivantes :
   (a) Calculer la probabilité que le tirage soit unicolore.
   (b) Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore.
   (c) Calculer la probabilité que le tirage soit bicolore.
2. Reprendre les questions précédentes avec un tirage **sans remise** des 3 boules.

Exercice n°4 Calculer des probabilités lors de tirages simultanés

Une main au poker est le donnée de 5 cartes parmi 52.
Calculer la probabilité d'avoir dans sa main :

1. un carré (4 cartes de même hauteur)
2. une suite royale (5 cartes de même couleur et de valeurs qui se suivent, un as pouvant être avant le 2 ou après le R.)
3. une suite n'étant pas une suite royale (5 cartes de valeurs qui se suivent, un as pouvant être avant le 2 ou après le R.)
4. un full (3 cartes de même hauteur et les deux restant de même hauteur)
5. un brelan n'étant pas un full ou un carré (3 cartes de même hauteur)

Exercice n°5 Calculer des probabilités

On compose au hasard un numéro de téléphone (de dix chiffres).

1. Indiquer l'univers associé à l'expérience et son cardinal.
2. Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?
3. Quelle est la probabilité qu'il commence par 02 ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit constitué de 3 chiffres 7, 2 chiffres 4, 4 chiffres 5 et d'un zéro ?
5. Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice n°6 Connaître et utiliser les propriétés d'une probabilité

Une classe est constituée de 30 élèves, chacun pouvant apprendre entre une et trois langues vivantes, à choisir parmi l'anglais, l'espagnol et l'italien. On choisit au hasard un élève de la classe. On note respectivement A, E, I, les événements : l'élève choisi apprend l'anglais, l'espagnol, l'italien.
On sait que 28 élèves apprennent l'anglais, 13 l'espagnol et 5 l'italien. De plus, 11 élèves apprennent l'anglais et l'espagnol, 4 l'anglais et l'italien, et 2 l'espagnol et l'italien.

1. Déterminer la probabilité de l'événement T: "l'élève choisi apprend les trois langues".
2. Traduire en français l'événement : $\overline{A} \cup \overline{I} \cup \overline{E}$. Déterminer sa probabilité.
3. (a) Traduire les événements $I \cap (\overline{A} \cap \overline{E})$ et $I \cap (A \cup E)$ puis justifier que : $P(I \cap (\overline{A} \cap \overline{E})) + P(I \cap (A \cup E)) = P(I)$.
   (b) Justifier que : $P(I \cap (A \cup E)) = P(A \cap I) + P(E \cap I) - P(T)$.
   (c) En déduire la probabilité qu'un élève apprennent seulement l'italien.

Exercice n°7 Comprendre la différence entre indépendance deux à deux et mutuelle

On lance deux fois un dé puis on considère les événements :

- $A_1 =$ “ le premier nombre obtenu est pair ”
- $A_2 =$ “ le second nombre obtenu est impair ”
- $A_3 =$ “ la somme des deux nombres obtenus est paire ”

1. Montrer que ces événements sont deux à deux indépendants.
2. Montrer qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice n°8 Utiliser l'indépendance et l'incompatibilité

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note :

- P_k l'événement : “Obtenir Pile au k-ième lancer”
- F_k l'événement : “Obtenir Face au k-ième lancer”

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : “On obtient uniquement des Piles lors des n premiers lancers”

B : “On obtient au moins une fois Pile lors de n premiers lancers”

C : “On obtient pour la première fois Face au n-ième lancer”

D : “On obtient exactement une fois Face lors des n premiers lancers”

E : “On obtient exactement deux fois Face avant l'obtention du second Pile”

F : “On obtient exactement n fois Face avant l'obtention du second Pile”

Exercice n°9 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. n couples femme/homme participent à un cours de danse. Des paires de danseurs et danseuses sont constitués au hasard. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note A_i l'événement “le i-ième couple a été reconstitué”.

1. En utilisant la formule des probabilités composés, déterminer la probabilité que chaque personne danse avec la personne avec laquelle elle est venue.
2. Retrouver ce résultat par une autre méthode ce résultat.

Exercice n°10 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Une urne contient 3 boules blanches et 4 noires. On en extrait successivement et sans remise 3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches ?

Exercice n°11 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Deux urnes contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans la première (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.

Pour $i \in [\![1, 2]\!]$, on note V_i :“obtenir une boule verte au tirage i”et R_i :“obtenir une boule rouge au tirage i”. Pour chaque question, vous commencerez par écrire les événements à étudier à l'aide des événements R_i et V_i.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ? deux boules rouges ?
2. On sait que les deux boules tirées sont de même couleur.
   Quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?
3. Calculer la probabilité pour obtenir une boule verte et une boule rouge.

Exercice n°12 Savoir utiliser la formule des probabilités composées

Un mobile se déplace sur les sommets d'un carré $ABCD$. Il commence au sommet A à l'instant 0, et à chaque instant jusqu'au temps $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, bouge sur l'un des trois sommets autres que celui sur lequel il se trouve de façon équiprobable. On note A_i l'événement “le mobile est sur A à l'instant i”.

Déterminer la probabilité que le mobile revienne pour la première fois en A à l'instant n où $n \in [\![1; N]\!]$.

Exercice n°13 Utiliser la FPT et la formule de Baye

Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont abimées, 60% des boîtes abimées contiennent un CD défectueux et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état.
Un client achète un CD. On note A l'évènement “la boîte achetée est abimée” et D l'évènement “Le CD acheté est défectueux”.

1. Calculer $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(D)$, $P_{\overline{A}}(D)$, $P_A(\overline{D})$, $P_{\overline{A}}(\overline{D})$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abimée?

Exercice n°14 Utiliser la FPT et la formule de Baye

Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

Exercice n°15 Savoir utiliser la formule de Bayes

On se donne N urnes numérotées de 1 à N. L'urne n°k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire une boule au hasard. La boule obtenue est blanche. Déterminer la probabilité que le tirage ait eu lieu dans l'urne k.

Exercice n°16 Savoir utiliser la formule de Bayes

On considère un QCM où, à chaque question posée, sont proposées $m \in \mathbb{N}^\star$ réponses possibles, dont une seule est exacte. Soit le candidat connait la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que le candidat connaisse la réponse est de $3/4$. Sachant que le candidat a répondu correctement à la question, déterminer m pour que la probabilité qu'il sache effectivement la réponse soit égale à $0,9$.

Exercice n°17 Probabilités et suite 1

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes. Il constate :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 80% d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent un melon une semaine donnée, 70% d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note A_n événement : "le client achète un melon au cours de la semaine n". Dans la suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $p_n = P(A_n)$.

1. Donner p_1.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice n°18 Probabilités et suite 2

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'une photocopieuse obéissant aux règles suivantes :

- le jour de son installation (jour 1), la photocopie fonctionne ;
- si la photocopieuse fonctionne un jour donné, elle a la probabilité $\dfrac{1}{10}$ d'être en panne le jour suivant ;
- si la photocopieuse est en panne un jour donné, elle a la probabilité $\dfrac{5}{7}$ de fonctionner le jour suivant.

Pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note F_n l'événement "La photocopieuse fonctionne le jour n" et $p_n = P(F_n)$.

1. Etablir une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la nature de la suite (p_n), puis expliciter p_n en fonction de n.

Exercice n°19 Probabilités et suite 3

On s'intéresse à la survie d'une population de cellules se développant de la façon suivante : si l'on considère une cellule à la génération n, celle-ci :

- mourra avec une probabilité de $\dfrac{3}{10}$;
- se divisera en 2 cellules avec une probabilité de $\dfrac{7}{10}$;

cela indépendamment des autres cellules présentes.

A l'instant initial (génération 0), on suppose que la population est constituée d'une seule cellule. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$:

$$X_n : \text{"La population a disparu à la génération } n \text{ (ou avant)", et } x_n = P(X_n).$$

On a donc, par exemple, $x_1 = \dfrac{3}{10}$.

1. Calculer x_2.
   On utilisera la formule des probabilités totales avec les événements
   D_i : "Il y a i cellules à la génération 1".
2. En vous inspirant de la méthode proposer à la question précédente, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $x_{n+1} = \dfrac{7}{10}x_n^2 + \dfrac{3}{10}$.
3. On note $f : x \mapsto \dfrac{7}{10}x^2 + \dfrac{3}{10}$, étudier la fonction f sur $[0;1]$.
4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0;1]$.
5. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis convergente vers une limite $\ell \in [0;1]$.
6. Déterminer les points fixes de f. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Interpréter ce résultat.

Exercice n°20 Probabilités et suite 4

On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i, il passe en A_j $(j \neq i)$ avec une probabilité 2/5 dans les deux cas, il reste en A_i avec la probabilité 1/5.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements :
U_n : "après n déplacements le mobile se trouve en A_1" et $P(U_n) = u_n$;
V_n : "après n déplacements le mobile se trouve en A_2" et $P(V_n) = v_n$;
W_n : "après n déplacements le mobile se trouve en A_3" et $P(W_n) = w_n$.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$$
.
3. On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Justifier qu'il existe une matrice D diagonale telle que $PD = AP$.
En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer la matrice colonne $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$ en fonction de A, n et $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$
6. Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n.
Déterminer les limites de ces trois suites.