TD n°14 - Dérivation

Exercice n°1 Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   (a) Etudier la continuité de f.
   (b) Etudier la dérivabilité de f, puis proposer une allure possible de la courbe de f au voisinage de 0.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Que pensez-vous de la question : la fonction g est-elle continue, dérivable en 0 ?
   (b) La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   Si oui, la fonction prolongée $\widetilde{g}$ est-elle dérivable en 0 ?
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2 Prolonger une fonction et étudier la dérivabilité du prolongé

On définit la fonction f par $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln|x|}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Sur quel ensemble peut-on assurer sans calcul que f est de classe C^∞ ?
2. (a) Prolonger f par continuité en 0. On notera f_1 le prolongement.
   (b) Etudier la dérivabilité en 0 de f_1, puis proposer une allure possible de la courbe de f au voisinage de 0.
3. Dans cette question, on prolonge à nouveau f mais un 1 cette fois, on note f_2 ce nouveau prolongement qui vérifie $f_2(1) = 0$.
   (a) Etudier la continuité de f_2 à droite et à gauche de 1.
   (b) Etudier la dérivabilité de f_2 à droite et à gauche de 1.

Exercice n°3 Calculer des dérivées successives

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer les dérivées successives de :
   $f(x) = e^{px}$, $g(x) = (1-x)^p$.
2. Dans chaque cas justifier que la fonction est de classe C^∞ sur son domaine de définition, et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de cette fonction :
   $f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice n°4 Utiliser la formule de Leibniz

1. Justifier que la fonction f définie par $f : x \mapsto (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer les dérivées successives de f_n.
   (b) Calculer la dérivée d'ordre n de f_{2n} directement, puis en écrivant $f_{2n} = f_n \cdot f_n$ et en utilisant la formule de Leibniz.
   (c) En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
3. Justifier que la fonction g définie par $g : x \mapsto e^x \cos x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°5 Utiliser la formule de Leibniz pour déterminer des dérivées successives

Pour tout $c \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer deux fonctions polynomiales non nulles p et q telles que :
$$\forall x \in]-1, 1[, \; p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0.$$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation vérifiée par $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$ (on utilisera la formule de Leibniz).
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2p)}(0)$ (on recherchera une relation de récurrence entre $f^{(2p)}(0)$ et $f^{(2p-2)}(0)$, puis on exprimera le résultat en utilisant des factorielles).
4. Démontrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}.$$
5. Déduire de ce qui précède une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}.

Exercice n°6 Autour du théorème de Rolle (questions indépendantes)

1. **Théorème de Rolle généralisé** : Soit f une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$ (*on introduira la fonction la fonction $g = f \circ \tan$ définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dont on étudiera les caractéristiques*).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois.
   (a) Montrer que f' s'annule au moins n fois.
   (b) En itérant le raisonnement, qu'en déduit-on pour $f^{(n)}$?
   (c) Application : Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$.
   Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions distinctes sur $\mathbb{R}$ (*on raisonnera par l'absurde*).

Exercice n°7 Utilisations du TAF et de l'IAF (questions indépendantes)

1. A l'aide du TAF déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ définie sur $]1;+\infty[$.
   (a) A l'aide de l'IAF montrer que pour tout $x>1$, on a
   $$\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} \le \ln(\ln(x+1))-\ln(\ln x) \le \frac{1}{x\ln x}.$$
   (b) En déduire que la suite de terme générale $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$ diverge.

Exercice n°8 Etude de suites récurrences grâce à l'IAF

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{2+u_n}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa seule limite éventuelle ℓ ?
   (c) A l'aide de l'IAF, déterminer un réel $k\in]0;1[$ tel que :
   pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell|\le k\,|u_n-\ell|$.
   (d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=e^{-\frac{u_n}{2}}$.
   (a) Montrer que la fonction $f : x\mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ possède un unique point fixe noté ℓ et que $\ell\in]0;1[$.
   (b) A l'aide de l'IAF, déterminer un réel $k\in]0;1[$ tel que :
   pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell|\le k\,|u_n-\ell|$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice n°9 Utilisation du Théorème de limite de la dérivée

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^\star$, $f(x)=x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction g définie sur $[-1;1]$ par $g(x)=\arcsin(1-x^4)$.
   Montrer que g est de classe C^1 sur $[-1;1]$.

Exercice n°10 Utilisation du Théorème de limite de la dérivée

On considère la fonction définie par $f : x\mapsto e^{-1/x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera $\tilde{f}$ ce prolongement.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout x non nul
   $$\tilde{f}^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$
5. Calculer la limite de $\tilde{f}^{(n)}(x)$ lorsque x tend vers zéro.
   En déduire que $\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°11 Recollement de solutions d'une équation différentielle

Déterminer la (ou les) fonctions y de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (1-x)y'(x)+xy(x)=e^x.$$