TD n°14 - Limites

Exercice n°1 Calculer les limites usuelles suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{101}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^4}$; $\lim\limits_{x\to9} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{77}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5}$; $\lim\limits_{x\to0} \ln x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^7}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^9}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^8}$;

$\lim\limits_{x\to2} x^4$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^8$; $\lim\limits_{x\to0} \exp(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to e} \ln(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$;

Exercice n°2 Calculer les limites non indéterminées suivantes

(1) $\lim\limits_{x\to2} e^{\frac{1}{x}} - \ln(2x^2) + \frac{1}{x^3}\ln(x+1)$ (2) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x + 2x^2 - 3}{\sqrt{4x} - 5}$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x + x^2 + 3e^x$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x + 2 + \frac{1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3\ln(x) + \frac{3}{x^2+5}$ (6) $\lim\limits_{x\to0} [\ln(x)]^{77} + \frac{1}{x^2 - x}$ (7) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{-2}{x-1}$ (8) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{-2}{x-1}$

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \times \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (10) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3} + \sqrt{\frac{1}{x^2}} + \ln(2e^{-x})$

Exercice n°3 Calculer les limites indéterminées du type : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ suivantes

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^5 - 2x^4 + 5x^2 - 4x + 1$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{5x^6 + 3x^4 - 2x}$ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x + 8}{-5x + x^2 - 3}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-3x^2 + 2x - 1)$ (6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{3x^3 - 2x - 2}\right)$ (7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ (8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 3x^2 + 4\sqrt{x} - e^{3x}$

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{1000} - 2e^x + \ln(x^2)$ (10) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}$ (11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x) - 3x + x^4}{\sqrt{x} - e^x}$ (12) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} + \ln(x)$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 6\ln(x)}{e^{x^2} + 1}$ (14) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ (15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}\,x$

Exercice n°4 Calculer les limites indéterminée du type $\frac{0}{0}$ suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ (2) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ (3) $\lim\limits_{x\to3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$ (4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$ (5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x)}$

Exercice n°5 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2009} - x^{2008}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(3) $\lim\limits_{x\to1_-} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(4) $\lim\limits_{x\to1_+} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}\,x$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$

(8) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}_-} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$

(9) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}_+} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$

(10) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} - x}{\ln(x)}$

(12) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}$

(14) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

(15) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-2}{x}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x)$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$

(18) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 3}\right)$

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{x^3 + x + 1}$

(23) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{xe^{2x} - 1}$

(24) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2\sqrt{x} + e^x$

(25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} + 1}{x^2 + 1}$

(26) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} - \ln(x)$

(27) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}}$

(28) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + x^2\ln(x)}{\ln(x)^2 + \ln(x^2)}$

(29) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x + 1}}{x^2 + 1}$

Exercice n°6   Calculer des limites à gauche et à droite :

1. $f(x) = xe^{1/x}$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$. Etudier l'existence et, le cas échéant, la valeur de la limite de $f(x)$ en 0.
2. $f(x) = x^{\ln(\ln(x))}$ pour $x > 1$ et $f(x) = 0$ pour $x < 1$.
   Etudier l'existence et, le cas échéant, la valeur de la limite de $f(x)$ en 1.

Exercice n°7   Utiliser les théorèmes de minoration, majoration, encadrement

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \leq e^x \leq 1 + xe^x$.

   Retrouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $x^2 \leq e^x$.

   Retrouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

   Mieux, en déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty$.