

## TD n°14 - Les séries

### Exercice n°1 Etudier la convergence par calcul direct des sommes partielles

1. On considère la série numérique :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ .

On note  $S_n$  la somme partielle d'ordre  $n$  associée.

(a) Vérifier que :  $\forall k \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

(c) Conclure quant à la nature de cette série. Le cas échéant, donner sa somme.

2. Etudier la nature des séries :  $A = \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  et  $B = \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ .

### Exercice n°2 Etudier la convergence par étude de la suite des sommes partielles

On considère la série numérique :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ . On note  $S_n$  la somme partielle d'ordre  $n$  associée.

1. Etudier la monotonie de la suite  $(S_n)$ .

2. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ , on a :  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

3. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ , on a :  $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

4. En déduire que la suite  $(S_n)$  est bornée. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge et donner un encadrement de sa somme.

### Exercice n°3 Résultat général sur les séries géométriques dérivées une et deux fois

Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . On considère la fonction définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .

On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Réécrire  $f(x)$  sans le symbole  $\sum$ .

2. Proposer deux expressions de  $f'(x)$ . En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .

3. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$  converge si et seulement si  $x \in ]-1; 1[$  et donner sa somme.

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . En vous inspirant de la démarche précédente, montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$  converge si et seulement si  $x \in ]-1; 1[$  et donner sa somme.

### Exercice n°4 Connaître les séries usuelles

1. Repérer, parmi les séries suivantes, celles qui sont "usuelles" et étudier leurs natures.

2. Parmi les séries qui ne sont pas usuelles, repérer celles qui divergent grossièrement.

$$1. A = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{2^n} \quad 1. D = \sum_{n \geq 2} \frac{n}{\ln(n)} \quad 8. G = \sum_{n \geq 1} \frac{n(-1)^n}{n!}$$

$$2. B = \sum_{n \geq 2} \frac{n}{5^n} \quad 5. E = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \quad 9. H = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$3. C = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \exp(n) \quad 6. F = \sum_{n \geq 0} n3^n(n-1)2^{-n} \quad 10. I = \sum_{n \geq 1} n \left( \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)$$

### Exercice n°5 Etudier des séries

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes :

$$1. A = \sum_{n \geq 0} (2n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad 3. C = \sum_{n \geq 0} \frac{n+3^n}{n!}$$

$$2. B = \sum_{n \geq 0} \frac{4n^2 + 5n}{2^n}$$

### Exercice n°6 Etude d'une série binomiale

On admet que pour tout entier naturel  $m$  et tout  $x \in [0, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq m} \binom{n}{m} x^n$  est

convergente et on note  $S_m(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^k$ .

1. Calculer  $S_0(x)$  et  $S_1(x)$ .

2. En utilisant la formule de Pascal, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad S_{m+1}(x) = xS_m(x) + xS_{m+1}(x).$$

3. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad S_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

**Exercice n°7 Etude d'une suite par étude de la série télescopique associée**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ , puis montrer que la suite  $(u_n)$  converge. Déterminer sa limite.
2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^2$  converge et calculer sa somme.
3. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  est divergente.

**Exercice n°8 Autour de la convergence absolue**

1. En utilisant la convergence absolue, justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$  est convergente.

On utilisera le résultat de l'exercice n°2.

2. On considère la suite  $(S_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

(a) Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

(b) Que peut-on conclure quant à la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  ?

(c) La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge-t-elle absolument ?