TD n°15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice n°1 Vérifier les propriétés de définition d'un espace vectoriel

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles ?
Faire une représentation graphique de chacun de ces ensembles.

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y+1\}, \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}, \quad E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$

Exercice n°2 Montrer qu'un espace est vectoriel en montrant que c'est un sev

1. Montrer que $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
2. Montrer que $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Montrer que $E_3 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{C}$-ev pour les lois usuelles.

Exercice n°3 Montrer qu'un espace est vectoriel en montrant que c'est un sev

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles ?
   $F_1 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ diverge}\}$, $F_2 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
   $F_3 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$, $F_4 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ géométrique}\}$
2. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles ?
   $G_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$, $G_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$
   $G_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \geq 0\}$, $G_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ surjective}\} \cup \{f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$
3. L'ensemble H_1 des solutions $y \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 1$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Et l'ensemble H_2 des solutions de l'équation homogène associée ?

Exercice n°4 Montrer qu'un espace est vectoriel en lui déterminant des générateurs

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles et déterminer une famille de générateurs de ces espaces.

- $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$, $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+2z+t = 0\}$, et $F_3 = F_1 \cap F_2$
- $F_4 = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M = \begin{bmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{bmatrix}\right\}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $F_5 = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists c \in \mathbb{K}, \ \forall (i,j) \in [\![1,\, n]\!]^2, \quad a_{ij} = c\}$
- $F_6 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid a+b+c+d = 0\right\}$
- $F_6 = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' - 3f' + 2f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$

Exercice n°5 Manipuler l'écriture Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient $u, v, w \in E$.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(u,v,w)$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,v,2u-v)$.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,-2v) = \mathrm{Vect}(u,-2v+3u)$.
4. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\exp, \dfrac{1}{\exp}\right) = \mathrm{Vect}(\cosh, \sinh)$.

Exercice n°6 Montrer que deux sev sont (ou non) supplémentaires

1. Soient $F_1 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y-z = 0\}$.
   (a) Montrer que F_1 et F_2 sont des plans vectoriels.
   (b) Déterminer des générateurs des ensembles $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.
   (c) A-t-on $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$? Proposer un supplémentaire de F_1 dans $\mathbb{R}^3$.
2. On définit les deux ensembles suivants :
   $$F = \left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & -a \end{bmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{\begin{bmatrix} a & 2a+b \\ b & b-a \end{bmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   (a) Montre que F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
   (b) F et G sont-ils deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) En raisonnant par analyse-synthèse, montrer que tout éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et d'un élement de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
   (c) Que peut-on en déduire au sujet de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$?
4. On considère $F = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et
   $G = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x + \beta\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice n°7 Vérifier les propriétés de définition d'un esapce vectoriel

Dans $\mathbb{R}_+^\star$, on définit une loi $\boxplus$ par $x \boxplus y = xy$ et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par $\lambda * x = x^\lambda$.
Vérifier que $(\mathbb{R}_+^\star, \boxplus, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Applications linéaires

Exercice n°8 Etude de la linéarité d'une application, son injectivité et sa surjectivité

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y,\ x+y,\ y-x)$
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Trouver des générateurs de son noyau et de son ensemble image. Que peut-on en conclure ?
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y-1,\ 2x-y)$
   Montrer que g n'est pas un endomorphisme, mais qu'elle est injective.
3. On considère $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $u(z) = z + i\overline{z}$.
   Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. Est-il injectif ? Surjectif ?
4. Soit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = M - {}^tM$.
   Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il injectif ? Surjectif ?
5. Soit $E = C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $v : E \to F$ définie par $v(f) = f' - 2f$.
   (a) Montrer que v est une application linéaire.
   (b) Etudier son injectivité, sa surjectivité.

Exercice n°9 Manipuler des composées d'applications linéaires

1. Soient f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $f = \lambda\,\mathrm{id}_E + g$ avec $g \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$
   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la composée $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

2. **Application** : soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto AX$.

   (a) Déterminer un réel λ tel que $(f_A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) \circ (f_A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))}$.
   En déduire les puissances de f.

   (b) Déterminer l'expression du terme général des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{array} \right.$.

Exercice n°10 Manipuler des noyaux d'applications linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E.
On définit l'ensemble des vecteurs invariants par f par $\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

1. Justifier sans aucun calcul que $\mathrm{Inv}(f)$ est un espace vectoriel.
   Déterminer son intersection $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Soit f_1 un automorphisme de E. A quelle condition a-t-on $\mathrm{Inv}(f_1) \oplus \mathrm{Ker}(f_1) = E$?
3. Soit f_2 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $(x, y, z) \mapsto (x + y,\, y + z,\, x - z)$.
   Déterminer des générateurs des ensembles $\mathrm{Inv}(f_2)$ et $\mathrm{Ker}(f_2)$. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice n°11 Projection et symétrie dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P le sev des fonctions paires et I le sev des fonctions impaires.
On a établi en cours que $E = P \oplus I$.

1. Déterminer l'image de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 - 3x + 1$ par la projection sur P parallèlement à I.
2. Déterminer l'image de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ par la symétrie par rapport à I parallèlement à P.

Exercice n°12 Expression analytique d'une projection ou symétrie de $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sev de $\mathbb{R}^3$

$$F = \mathrm{Vect}(u) \text{ avec } u = (1, 2, 3) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(v, w) \text{ avec } v = (1, 1, 0),\ w = (0, 0, 1)$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les triplets de réels (λ, μ, δ) tels que $(x, y, z) = \lambda u + \mu v + \delta w$.
   Que peut-on en déduire sur les espaces F et G ?
2. Donner l'expression analytique de la projection sur la droite vectorielle F parallèlement au plan G.
3. En déduire l'expression analytique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice n°13 Reconnaître un projecteur ou une symétrie

1. Etudier la nature de $\left\{ \begin{array}{llll} g : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x + y,\, x + y,\, 2z) \end{array} \right.$ et ses éléments caractéristiques.
2. Etudier la nature de $\left\{ \begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{3}(-5x + 4y,\, -4x + 5y) \end{array} \right.$ et ses éléments caractéristiques.