# TD n°15 - Applications continues

## Applications

### Exercice n°1 Déterminer des ensembles images par une application

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
   Déterminer l'image de $f$, $f([0;3])$, $f([-1;2])$ et $f(]-\infty;\sqrt{2}])$.
2. On considère l'application $g : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   Déterminer l'image de $g$, $g([2;4])$, $g(]0;2])$ et $g([-1;0[\cap]0;5])$.

### Exercice n°2 Injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifiez. Lorsque l'application est bijective, on précisera l'application réciproque.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^2 \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{l} ]-\infty;1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1-x) \end{array} \right. \qquad f_3 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1;+\infty[ \\ x \longmapsto 5x^2-1 \end{array} \right.$$

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\backslash[-2;2] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2-4} \end{array} \right. \qquad f_5 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\backslash\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x \longmapsto \dfrac{2x+3}{x-3} \end{array} \right. \qquad f_6 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow ]-1;1[ \\ x \longmapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array} \right.$$

### Exercice n°3 Notion d'application réalisant une bijection

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-3}{2x^2+1}$.

1. Montrer que l'application $f$ n'est pas bijective. Est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer deux ensembles $A$ et $B$, les plus "grands" possibles (au sens de l'inclusion), afin que $f$ réalise une bijection de $A$ sur $B$.

### Exercice n°4 Composition d'applications bijectives

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}_+^\star \to ]3;4[$, $x \mapsto \dfrac{3x+4}{x+1}$
   Montrer que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.
2. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$, $x \mapsto e^{2x+1}$.
   Montrer que $g$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.
3. On considère l'application $h : \mathbb{R} \to ]3;4[$, $x \mapsto \dfrac{3e^{2x+1}+4}{e^{2x+1}+1}$
   (a) Exprimer $h$ en fonction de $f$ et $g$.
   (b) En déduire que $h$ est bijective ainsi que $h^{-1}$.

### Exercice n°5 Etude d'une bijection classique

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Montrer que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

## Continuité

### Exercice n°6 Etudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition :

$$a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{array} \right. \qquad d(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

$$b(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{array} \right. \qquad e(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\exp(2x)-1}{6x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

$$c(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

### Exercice n°7 Prolongement par continuité en un point

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité en $\{x_0\}$.

$$f(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1} \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad h(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{2\}.$$

### Exercice n°8 Savoir utiliser le TVI

Les questions qui suivent sont indépendantes.

1. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11}+1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède au moins une solution.
2. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ d'inconnue $x \in [1;10]$ possède au moins une solution.
3. Soit $f$ une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$.
   (a) On note $g : x \mapsto f(x) - x$. Quel est le signe de $g(0)$ ? de $g(1)$ ?
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

**Exercice n°9 Savoir utiliser le théorème de la bijection continue**

1. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   (a) Dresser le tableau des variations de $f$ limites comprises. En déduire que $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ à préciser.
   (b) Justifier que la bijection réciproque, notée $g^{-1}$, est continue et dresser le tableau des variations de $g^{-1}$ en précisant les limites aux bornes.
   (c) Déterminer l'expression de $g^{-1}$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : x \mapsto x - 2 + \ln(x)$.
   (a) Faire l'étude complète de la fonction $f$ limites comprises. En déduire que $f$ réalise une bijection entre deux ensemble que vous préciserez.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. Justifier que $\alpha \in [1; 2]$.
3. Montrer que l'équation $x^2 e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution $\alpha$. Justifier que $\alpha \in [0, 1]$.

**Exercice n°10 Etude d'une suite définie implicitement du type $f(u_n) = k_n$ n°1**

On définit sur $\mathbb{R}_+^\star$ la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variation de $f$. En déduire que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur un intervalle $J$ à préciser et donner le tableau de variation de la bijection réciproque notée $f^{-1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution, notée $u_n$, sur $\mathbb{R}_+^\star$. Exprimer cette solution à l'aide de $f^{-1}$.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$ est croissante et donner sa limite.

**Exercice n°11 Etude d'une suite définie implicitement du type $f(u_n) = k_n$ n°2**

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère l'équation $x \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in [1; +\infty[$.
On admet que $2 < e < 3$.

1. Montrer que cette équation possède une unique solution qu'on notera $u_n$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$ est croissante.
3. Vérifier que $f(e) = e$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, $e \leq u_n$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, $u_n \leq n$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, $\dfrac{n}{\ln n} \leq u_n$.
   Conclure quant au comportement asymptotique de $(u_n)$.

**Exercice n°12 Etude d'une suite définie implicitement du type $f_n(u_n) = 0$ n°1**

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $[0, 1]$ par $f_n : x \mapsto x^n + 1 - nx$.

1. Etudier les variations de $f_n$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0, 1]$. On note $u_n$ cette valeur.
3. **Monotonie de** $(u_n)$
   (a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$.
   (c) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)$ puis la convergence de cette suite.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n}$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice n°13 Etude d'une suite définie implicitement du type $f_n(u_n) = 0$ n°2**

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$. On considère l'équation $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
On introduit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ limites comprises.
2. Montrer que cette équation possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ qu'on notera $u_n$. Justifier que $u_n \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 3}}$ est croissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 3}}$ converge vers un réel $\ell$. Donner un encadrement de $\ell$.
5. Justifier que $u_n^n$ converge vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
6. En déduire la valeur de $\ell$.